Fuchs

Uebersicht der Theorie

der

Elliptischen Funktionen

von

C. Hermite.

Aus dem Französischen übertragen

und

mit einem Anhange versehen

von

Leopold Natani.

Berlin, 1863.

Verlag von Wiegandt & Hempel.

Vorwort.

Diese Uebersicht bildet im Original den Anhang zur sechsten Ausgabe von Lacroix's *Traité élementaire de calcul différentiel et intégral.* Sie giebt die Theorie der elliptischen Funktionen bis ausschliesslich zum Transformationsproblem in sehr klarer, kurzer, übersichtlicher und einfacher Weise, und möchte sie deshalb als besonders geeignet für Solche erscheinen, welche das Studium der elliptischen Funktionen beginnen wollen. Die Reichhaltigkeit der Resultate, die sinnreiche Form der Entwickelung und namentlich die vielfachen Andeutungen und Aussichtspunkte auf Theorien, die sich an den Gegenstand dieser Uebersicht anknüpfen, werden auch das Interesse Derjenigen erregen, welche bereits mit den elliptischen Funktionen vertraut sind. So z. B. kann wohl auf die Seite 19 bis 24 gegebene Reihenentwickelung mit unbestimmten Coefficienten hingewiesen werden, welche nicht allein im Buche selbst vielfache Anwendung findet, sondern auch z. B. für die Darstellung des Transformationsproblems und verwandter Theorien von grosser Wichtigkeit erscheint, so wie auf die kurze, die Funktionen mit vielfacher Periodicität betreffende Notiz.

Der Uebersetzer glaubte durch die besondere Uebertragung dieser Uebersicht dem deutschen Leser um so mehr einen Dienst zu erweisen, als in dem gedachten Elementarbuche dieselbe wohl nicht ganz an ihrer Stelle erscheinen möchte. Es dürfte wohl nämlich jetzt allgemein anerkannt sein, dass sich eine strenge und vollständige Behandlung der elliptischen Funktionen nicht ohne gewisse von Cauchy herrührende Sätze über die zwischen complexen Grenzen genommenen Integrale geben lässt.

In der That ist die Kenntniss dieser Sätze, so wie des Residuencalculs vom Verfasser vorausgesetzt worden, ohne dass jedoch in der betreffenden Ausgabe von Lacroix's Lehrbuche dieselben hinzugefügt sind, was um so mehr zu beklagen ist, als diese Betrachtungen auch für andere Zwecke wichtig sind und recht eigentlich in ein solches Elementarbuch gehören. Der Uebersetzer hat sich daher veranlasst gesehen, diese Lücke in einem hinzugefügten Anhange auszufüllen, und glaubt dadurch Denjenigen, welche sich des Buches zum ersten Studium bedienen wollen, einen Dienst geleistet zu haben; dass er daran der Vollständigkeit wegen einige Entwickelungen geknüpft, die nicht unmittelbar im Buche Anwendung finden, wird wohl auch Verzeihung finden.

In wie weit diese Darstellung eine selbstständige ist und in wie weit man sich hierbei an Briot und Bouquet's *Traité des fonctions doublement périodiques* angeschlossen hat, wird der Kundige leicht ersehen. Dass im Anhange noch die Verwandlung der Integrale, welche eine Wurzel vierten Grades enthalten, auf die Form der elliptischen Integrale gegeben wurde, welche im Buche selbst, als das Transformationsproblem berührend, nicht enthalten ist, rechtfertigt sich daraus, dass diese Verwandlung selbst bei den einfacheren Anwendungen der elliptischen Funktionen nothwendig ist. Abgesehen von diesem Anhange hat man sich auf eine möglichst treue Uebersetzung und Verbesserung mehrerer Druckfehler beschränkt.

Der Uebersetzer.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
A. Gemeinschaftliche Eigenschaften der trigonometrischen und elliptischen Funktionen	3
B. Ueber die Periodicität der trigonometrischen und elliptischen Funktionen	5
I. Satz von Jakobi	6
II. Von der Periodicität der trigonometrischen Funktionen	8
III. Von dem Ausdrucke: $\Pi \, x \left(1 + \frac{x}{m}\right)$	11
IV. Liouville'scher Satz	14
C. Definition der Funktionen Θ (x), H (x), ihr Ausdruck in Produkten und Reihen	15
I. Erste Methode	15
II. Zweite Methode	19
III. Bemerkungen über die Funktionen mehrerer Variablen mit vielfacher Periodicität	24
IV. Vergleich zwischen den Ausdrücken der Funktionen Θ und H in Form von unendlichen Produkten und Reihen	27
D. Ueber die beiden Hauptformen, welche unter unendlich viel anderen die Funktionen Θ, H u. s. w. annehmen können	33
E. Grundeigenschaften der Funktionen Θ und H, Definition von sin am x, cos am x, Δ am x	36
I. Algebraische Beziehungen. — Vom Modul und seinem Complement	38
II. Definition von sin am x, cos am x, Δ am x. — Differenzialgleichungen	43
III. Ueber die Grössen K und K'	48
F. Addition der Argumente. — Abel'scher Satz	56
I. Abel'scher Satz	58
II. Formeln für die Addition zweier Argumente	64
III. Von der Multiplication der Argumente	69
G. Von den Funktionen zweiter und dritter Gattung	70
I. Ausdruck der Funktionen zweiter und dritter Gattung in Θ (x)	73
II. Von der Funktion Z (x)	75

Seite
III. Von der Funktion Π (x, a) 78
a) Vertauschung der Amplitude und des Parameter . . 79
b) Von den vollständigen Funktionen 80
c) Addition der Argumente 81
d) Von verschiedenen, der Funktion dritter Gattung analogen Funktionen 83
H. Von den Weierstrass'schen Funktionen 84
I. Definition der vier Funktionen Al (x). — Differenzialgleichungen 86
II. Partielle Differenzialgleichungen. — Entwickelungsformeln . . 88
J. Entwickelungen der elliptischen Funktionen in einfache Reihen nach Sinus und Cosinus 92
I. Erste Methode 92
II. Anordnung der vorstehenden Reihen nach Potenzen von q . 97
III. Beweis der fundamentalen Differenzialgleichungen 98
IV. Entwickelung einer doppelt periodischen Funktion in Sinus- und Cosinus-Reihen 102
V. Liouville'scher Satz 110

Anhang.

A. Ueber Funktionen von einer complexen Variablen und über die Mehrdeutigkeit der Integrale 119
I. Geometrische Darstellung des Imaginären 119
II. Ueber Funktionen von einer complexen Variablen 120
III. Eindeutige und mehrdeutige Funktionen 122
IV. Mehrdeutigkeit der Integrale 127
V. Entwickelung der Funktionen in Reihen 130
VI. Grundzüge der Residuenrechnung 135
B. Reduktion der Integrale algebraischer Funktionen, welche eine Quadratwurzel von einer ganzen Funktion vierten Grades enthalten, auf die elliptischen Integrale 140

Uebersicht

der

Theorie der elliptischen Funktionen.

Einleitung.

Bekanntlich giebt man den Namen: algebraische Funktion, jedem in Bezug auf eine Variable ganzen Polynom, den Quotienten solcher Polynome und den Wurzeln von Gleichungen, deren erstes Glied in Bezug auf die Unbekannte und die Variable eine ganze Funktion ist. Alle Funktionen, welche durch diese Definition, an welche wir hier erinnert haben, nicht bestimmt sind, nennt man Transcendenten, z. B. Exponentialgrössen und Logarithmen, Sinus, Cosinus, Tangente eines Kreisbogens, oder die arcus sinus, arcus tangens u. s. w.

Diejenigen Funktionen von Funktionen, welche man durch algebraische Combinationen aus diesen obengenannten Transcendenten erhält, sind offenbar ebenfalls transcendente Funktionen, und man sieht so ein, dass man deren Anzahl in's Unendliche vermehren könnte, freilich ohne allen Nutzen. Aber wenn man das Feld der Algebra verlässt und die Integralrechnung betrachtet, so geräth man auf natürlichem Wege und ganz von selbst auf eine wahrhaft fruchtbare Quelle von unendlich viel neuen Funktionen, die wesentlich von einander verschieden sind, jede für sich eigenthümliche analytische Eigenschaften, ausserdem aber gemeinschaftliche Charaktere besitzen, vermöge deren sie sich in grosse Kategorien bringen lassen, und deren tieferes Studium einer der interessantesten Gegenstände der gegenwärtigen Analysis ist. Zwei hervorragende Mathematiker, Abel und Jakobi, haben den Ruhm ihrer Namen zuerst an dies Studium geknüpft, indem sie den Grund zu einer Theorie der Transcendenten mit algebraischen Differentialen legten, wovon die Logarithmen $\int \frac{dx}{x}$ und die Kreisbogen $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ die einfach-

sten und elementarsten Grössen sind. Nach den Logarithmen und Kreisbogen kommen die elliptischen Funktionen, die aus der Betrachtung der Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ sich ergeben, sie eröffnen eine Reihe neuer Funktionen und stellen von diesen so zu sagen das erste Glied dar. Ihnen ist dieser Abriss gewidmet, und wir werden zunächst versuchen, von ihnen eine vorläufige Anschauung zu geben, indem wir ihre hervortretendsten Eigenschaften skizziren.

A. Gemeinschaftliche Eigenschaften der trigonometrischen und elliptischen Funktionen.

Indem wir so eben an die Definition der algebraischen Funktionen erinnerten, sagten wir, dass sie einerseits die rationalen Polynome und Brüche, andererseits die Wurzeln der Gleichungen $F(y, x) = 0$ in sich schlössen, deren erstes Glied ganz und rational ist in Bezug auf die Variable x und die Unbekannte y. Im ersten Fall haben die Funktionen nur einen einzigen Werth für jeden reellen oder imaginären Werth von x, während sie im letztern so viele Werthe darbieten, als der Grad der Gleichung, welche sie definirt und die wir als irreducibel annehmen, Einheiten hat. Ein ähnlicher Unterschied findet zwischen den einfachen Transcendenten sin x, cos x, tang x und arc sin x, arc cos x, arc tang x statt; die Erstern gleichen den rationalen Polynomen und Brüchen, da sie nur auf eine einzige Art bestimmt werden können, die Letztern dagegen lassen unendlich viel Werthe zu, und in dieser Beziehung kommen sie mit den Wurzeln einer Gleichung von unendlich hohem Grade überein. Ebenso verhält es sich offenbar mit der Exponentialgrösse e^x, und mit dem Logarithmus, den man als durch die transcendente Gleichung (Gleichung von unendlich hohem Grade) $e^y = x$ definirt sich vorstellen kann. Diese Beziehung, welche sich auf den ersten Blick darbietet, wird durch folgende Bemerkungen bestätigt und ergänzt. Für jeden reellen oder imaginären Werth der Variable hat man:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdot -$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots}$$

und aus der Convergenz der Reihen folgt, dass wenn man diese Transcendenten bei einem hinreichend vom ersten entfernten Gliede abbricht, sie sich mit beliebiger Genauigkeit durch Polynome und Brüche ersetzen lassen. Dagegen geben die Entwickelungen:

$$\lg (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

nur einen Sinn, so lange die Variable kleiner als Eins ist, und die annähernde Identität mit Polynomen ist nur in einem beschränkten Umfange möglich. Endlich kann man — und dies ist der Hauptpunkt — aus einem gegebenen Werthe, sei es der Exponentialgrösse oder der trigonometrischen Funktionen, auf algebraischem und selbst rationalem Wege unendlich viel andere Werthe erhalten. So berechnet man in der ebenen Trigonometrie, indem man von dem Bogen, welcher 10″ enthält, ausgeht, alle Werthe des Sinus, des Cosinus und der Tangente, welche in den Tafeln enthalten sind; dies ist eine ebenso merkwürdige als wichtige Eigenschaft dieser Funktionen, und sie ergiebt sich aus den Beziehungen:

$$e^{x+y} = e^x \, e^y$$

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg} (x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

deren zweite Glieder auf algebraischem Wege aus Funktionen mit den Argumenten x und y zusammengesetzt sind.

Die nämlichen Eigenschaften finden wir in den elliptischen Funktionen, von welchen sie die wesentlichsten Charaktere bilden, und wir können, indem wir das eben Gegebene zusammenfassen, von den neuen Funktionen sagen: „Sie sind einförmige, nur auf eine einzige Art zu bestimmende Funktionen, rationalen Brüchen analog, an die sie sich bis auf jede beliebige Grenze und in jedem beliebigen Umfange des Werthes der Variablen annähern lassen; ausserdem sind die Funktionen einer Summe zweier Argumente x und y algebraisch durch die Funktionen des Argumentes x und des Argumentes y ausdrückbar.“ So wie endlich der Exponentialgrösse und dem sinus als umgekehrte Funktionen lg x und arc sin x, d. h. $\int \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ entsprechen, so werden wir sehen, dass die um-

gekehrten Funktionen der elliptischen Funktionen Integrale von einer höhern Ordnung $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ sind, wo die Grösse unter dem Wurzelzeichen in Bezug auf x vom vierten Grade ist, und dass diese Integrale unendlich vieldeutig sind!

B. Ueber die Periodicität der trigonometrischen und elliptischen Funktionen.

Diese wichtige Eigenschaft zeigt ganz besonders den Unterschied, welcher die Funktionen, ihrer Natur nach, von den rationalen algebraischen Funktionen trennt, mit denen wir sie so eben verglichen haben, und drückt ihnen gewissermassen den augenscheinlichsten Charakter transcendenter Funktionen auf. Durch ihre Periodicität übrigens sind sinus und cosinus für fast alle Fragen der Analysis so wichtig, von denjenigen Untersuchungen an, welche die abstrakten Eigenschaften ganzer Zahlen betreffen, bis zu den Anwendungen der Analysis in der Physik und Astronomie. Von diesem Gesichtspunkte aus ist es besonders interessant, das erste Glied in der langen Reihe der neuen Transcendenten zu untersuchen, welches sich an die trigonometrischen Funktionen, die ja lange Zeit allein bekannt waren, unmittelbar anschliesst. Im Beginn ihrer Untersuchung machten Abel und Jakobi gleichzeitig die grosse Entdeckung, dass die elliptischen Funktionen 2 Perioden haben, eine, die man immer als reell annehmen kann, und eine, die nothwendig imaginär ist. Jakobi hat ausserdem bewiesen, dass eine eindeutige Funktion einer Variablen nicht mehr als 2 Perioden haben kann, und nach ihm hat Liouville, indem er die Theorie der doppelt periodischen Funktionen in ihrer ganzen Allgemeinheit behandelte, gezeigt, dass sie sich immer auf elliptische Funktionen zurückführen lassen, und so die Vermuthung Jakobi's ausser allen Zweifel gestellt, dass diese Funktionen Alles in sich fassen, was die Analysis in Bezug auf die genannte Periodicität in ihrem weitesten Sinne darzubieten im Stande ist. In dem Folgenden werden wir uns mit der Weise beschäftigen, wie die merkwürdige Thatsache der doppelten Periodicität sich analytisch darstellen lässt, indem wir damit anfangen, von diesem Gesichtsdunkte aus die einfache Periodicität der

trigonometrischen Funktionen zu betrachten. Zunächst aber geben wir, wegen ihres elementaren und rein arithmetischen Charakters, Jabobi's Beweis der Unmöglichkeit einer Funktion von mehr als 2 Perioden.

I. Satz von Jakobi.

Sind a und b zwei Grössen, deren Verhältniss reell und incommensurabel ist, so weiss man aus der Theorie der Kettenbrüche, dass man sich an $\frac{a}{b}$ durch unendlich viel rationale Brüche $\frac{m}{n}$ annähern kann, derart, dass immer die Bedingung erfüllt wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}$$

wo ε kleiner als Eins ist. Hieraus folgt:

$$na - mb = \frac{\varepsilon b}{n}$$

Aber eine Funktion, welche die Perioden a und b hat, bleibt unverändert, wenn man der Variablen eine Summe von ganzen Vielfachen dieser Grössen hinzufügt, also na — mb. Da man n so gross, als man will, nehmen kann (weil sonst $\frac{a}{b}$ nicht irrational wäre), so kann die neue Periode $na - mb = \frac{\varepsilon b}{n}$ kleiner als jede gegebene Grösse gedacht werden, und es ist somit klar, dass es keine doppelt periodische Funktion geben kann, wo das Verhältniss der Perioden reell und incommensurabel ist.

Auf denselben Schluss, d. h. auf eine unendlich kleine Periode, oder vielmehr eine solche, deren Modul unendlich klein ist, gerathen wir, wenn wir 3 imaginäre Perioden annehmen:

$$a = \alpha + \alpha' \sqrt{-1}$$
$$b = \beta + \beta' \sqrt{-1}$$
$$c = \gamma + \gamma' \sqrt{-1}$$

Man kann nämlich unendlich viel ganze Zahlen m n p finden, derart, dass der Modul von am + bn + cp kleiner als jede gegebene Grösse ist. Betrachten wir zu dem Ende die ternäre quadratische Form:

$$f = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + \frac{z^2}{\lambda^2},$$

wo λ eine reelle beliebige Zahl ist. Die Determinante wird sein:

$$\Delta = \frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}{\lambda^2}$$

Das Minimum von f für ganze Werthe der veränderlichen Grössen hat bekanntlich zur obern Grenze $\sqrt[3]{2\varDelta}$, derart dass, wenn man diese Werthe durch m n p bezeichnet, sich ergiebt:

$$(\alpha m+\beta n+\gamma p)^2+(\alpha' m+\beta' n+\gamma' p)^2+\frac{p^2}{\lambda^2}<\sqrt[3]{2\varDelta}$$

also um so mehr

$$(\alpha m+\beta n+\gamma p)^2+(\alpha' m+\beta' n+\gamma' p)^2<\sqrt[3]{2\varDelta}$$

Kann man also auch nicht gleichzeitig setzen:

$$\alpha m+\beta n+\gamma p=o,$$
$$\alpha' m+\beta' n+\gamma' p=o,$$

d. h.
$$am+bn+cp=o,$$

d. h. sind a b c 3 wirklich verschiedene Perioden, so sieht man doch, dass mit wachsendem λ $\varDelta$ so klein werden kann, als man will, und dass man auf Perioden kommt, deren Modul, wie wir oben gesagt haben, in's Unendliche abnimmt. Indess haben wir angenommen, dass die Determinante der quadratischen Form nicht Null ist. Aber in diesem besondern Fall betrachtet man statt der ternären die binäre Form:

$$(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha' x+\beta' y)^2+\frac{y^2}{\lambda^2}$$

unter der Bedingung, dass $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ ist, die Determinante ist dann: $\frac{\alpha^2+\alpha'^2}{\lambda^2}$, und wird niemals verschwinden können. Nehmen wir nun an, dass für $x=m$, $y=n$ ein Minimum einträte, so wird sein:

$$(\alpha m+\beta n)^2+(\alpha' m+\beta' n)^2+\frac{n^2}{\lambda^2}<\sqrt{\frac{4(\alpha^2+\alpha'^2)}{3\lambda^2}}$$

und um so mehr

$$(\alpha m+\beta n)^2+(\alpha' m+\beta' n)^2<\sqrt{\frac{4(\alpha^2+\alpha'^2)}{3\lambda^2}},$$

man kann also wie oben schliessen, und gelangt zu einer Periode am + bn, deren Modul beliebig klein ist. Dieser besondere Fall ist übrigens in dem, welchen wir zuerst betrachtet haben, mit eingeschlossen, denn die Bedingung $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ drückt aus, dass das Verhältniss $\frac{\alpha+\alpha'\sqrt{-1}}{\beta+\beta'\sqrt{-1}}=\frac{a}{b}$ reell ist.

II. Von der Periodicität der trigonometrischen Funktionen.

Die geometrische Bedeutung dieser Funktion, ihre Beziehung zum Kreise zeigt unmittelbar Alles, was ihre Periodicität betrifft, während in rein analytischer Beziehung, z. B. wenn man als Definition die Reihen annimmt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots .$$

diese wichtige Eigenschaft viel versteckter ist.

Nicht anders ist es in Betracht der Exponentialgrösse, die als Grenze eines ganzen Polynoms $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ oder als eine Reihe $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$ betrachtet werden kann. Indess hat man für die trigonometrischen Funktionen noch andere Ausdrücke, wo der periodische Charakter ebenso unmittelbar erscheint, wie in der Geometrie, und die zu untersuchen um so interessanter ist, als sie durch eine leichte Verallgemeinerung ganz von selbst auf Funktionen einer höhern Ordnung führen, welche 2 verschiedene Perioden haben. Als erstes Beispiel nehmen wir die Entwickelung in ein unendliches Produkt:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin \pi x = \pi x \left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\dots \\ \qquad\qquad \left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\dots, \end{array}\right.$$

welche man für unendliches m als die Grenze folgenden Polynoms betrachten kann:

$$\varphi(x) = x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\dots\left(1-\frac{x}{m}\right),$$
$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\dots\left(1+\frac{x}{m}\right).$$

Man sieht aber sogleich, dass:

$$\varphi(x+1) = -\varphi(x)\frac{m+1+x}{m-x},$$

und dies giebt, für $m=\infty$, $\varphi(x+1) = -\varphi x$, hieraus folgt: $\sin(\pi x+\pi) = -\sin \pi x$, oder, indem man x statt πx setzt, $\sin(x+\pi) = -\sin x$, und also $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

Auf ein zweites Beispiel kommen wir, wenn wir die logarithmische Ableitung der beiden Glieder der Gleichung 1) suchen, nämlich:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots .$$

Setzt man x+1 statt x, so wird das 2. Glied:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \ldots,$$

und reproducirt sich daher, denn die Partialbrüche haben nur ihren Platz geändert, indem jeder um eine Stelle vorrückt. Durch eine leichte Verallgemeinerung erhält man die folgende Art eine Funktion auszudrücken, welche eine beliebige Periode hat, nämlich:

$$\varphi(x)\,\varphi(x-a)\,\varphi(x-2a)\,\varphi(x-3a)\ldots$$
$$\varphi(x+a)\,\varphi(x+2a)\,\varphi(x+3a)\ldots$$

$$\varphi(x) + \varphi(x-a) + \varphi(x-2a) + \varphi(x-3a) + \ldots$$
$$+ \varphi(x+a) + \varphi(x+2a) + \varphi(x+3a) + \ldots .$$

Nur die Bedingung der Convergenz ist bei dem unendlichen Produkt oder der Reihe zu erfüllen. Wenn man ihr genügen kann, indem man für φ (x) eine an sich periodische Funktion annimmt, so geräth man auf den Ausdruck einer doppelt periodischen Funktion. Eine solche ist z. B. die Entwickelung:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x-a)} + \frac{1}{\sin(x-2a)} + \frac{1}{\sin(x-3a)} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\sin(x+a)} + \frac{1}{\sin(x+2a)} + \frac{1}{\sin(x+3a)} + \ldots,$$

welche sich genau ebenso in der Theorie der elliptischen Funktionen vorfindet, und deren Convergenz man leicht beweisen kann, wenn a imaginär ist. Ist aber a reell, so convergiren die höhern Glieder der Reihe nicht nach Null hin, und es findet offenbar Divergenz statt, was mit dem übereinstimmt, was oben über die Unmöglichkeit einer Funktion mit 2 reellen Perioden gesagt wurde. Aber auch ohne die Vermittelung einer schon periodischen Funktion anzuwenden, kann man auf den Ausdruck einer doppelt periodischen Reihe kommen, durch folgende doppelt unendliche Entwickelung:

$$\sum \varphi\,(x + ma + nb),$$

wo a und b die Perioden, m und n veränderliche ganze Zahlen sind, denen man alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ ertheilt. Und ebenso führt in Bezug auf die unendlichen Produkte eine unmittelbare Analogie auf Ausdrücke von der Form

$$\prod x\left(1 + \frac{x}{ma + nb}\right),$$

wo m und n ebenfalls ganze Werthe annehmen, nur die Combination $m = 0$, $n = 0$ ausgeschlossen. Aber die genauere Untersuchung dieser Ausdrücke hat einen eben so wichtigen als sonderbaren Umstand zu Tage gebracht. Cayley hat in einer Abhandlung über die doppelt periodischen Funktionen, welche im Liouville'schen Journal Band X. veröffentlicht ist, gezeigt, dass ihr Werth wesentlich von dem Gesetze abhängt, nach welchem man gleichzeitig m und n in's Unendliche wachsen lässt. So z. B. erhält man einen analytischen vollständig bestimmten und gegebenen Ausdruck, wenn man sich die Bedingung stellt, dass m und n Coordinaten eines Punktes im Innern eines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$ sein sollen, dessen Radius man bis in's Unendliche wachsen lässt. Wenn man aber den Kreis durch eine andere Curve ersetzt, so erhält man als Grenze eine andere Funktion, und anstatt auf diese Art doppelt periodische Funktionen darzustellen, die sich reproduciren könnten, wenn man für x $x + a$ und $x + b$ setzt, kommt man auf Funktionen, die sich mit einer Exponentialgrösse multiplicirt reproduciren. Diese Funktionen geben aber in der That die analytischen Fundamente, auf welchen, wie wir sehen werden, die ganze Theorie der elliptischen Funktionen beruht, aber man wird sehen, dass die Vermuthung, welche auf der Analogie der Ausdrücke

$$\prod x\left(1 + \frac{x}{m}\right),$$

$$\prod x\left(1 + \frac{x}{ma + nb}\right)$$

gegründet war, sich nicht bewährt, und dass die zweiten Funktionen nicht gerade doppelt periodisch sind, obgleich sie die wesentlichen Elemente zu den doppelt periodischen Funktionen geben. Da wir diese feinen und interessanten Untersuchungen nicht in ihrer ganzen Ausdehnung hier ausführen können, wollen wir davon nur eine allgemeine Anschauung geben, indem wir uns auf die einfach unendlichen

Produkte beschränken, welche zu den trigonometrischen Funktionen führen.

III. Von dem Ausdruck $\prod x\left(1+\frac{x}{m}\right)$.

Die Hauptsache, auf welche wir die Aufmerksamkeit lenken, besteht darin, dass dies Produkt nur periodisch ist, wenn man es als die schon bezeichnete Grenze betrachtet:

$$x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right)$$
$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{m}\right)$$

wenn m unendlich gross wird. Setzen wir in der That

$$1)\quad \begin{cases} \varphi(x) = x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right), \\ \qquad\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{m}\right), \end{cases}$$

und lassen wir m und n in's Unendliche zunehmen, unter der Bedingung, dass

$$m = \omega n$$

sei, wo ω eine vorher zu bestimmende Constante ist. Wir werden sehen, dass für $n=\infty$, der Grenzwerth von $\varphi(x)$ von ω abhängt und nur dann periodisch ist, wenn $\omega = 1$ ist.

Sei der Kürze wegen:

$$\sum\frac{1}{x-n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{x-n},$$
$$\sum\frac{1}{x+m} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+m},$$

so giebt Gleichung 1), indem man von beiden Gliedern die logarithmische Ableitung nimmt:

$$2)\qquad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum\frac{1}{x-n} + \sum\frac{1}{x+m}.$$

Es ist aber identisch:

$$\sum\frac{1}{x-n} = \sum\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{n}\right) - \sum\frac{1}{n} = \sum\frac{x}{nx-n^2} - \sum\frac{1}{n},$$
$$\sum\frac{1}{x+m} = \sum\left(\frac{1}{x+m}-\frac{1}{m}\right) + \sum\frac{1}{m} = \sum\frac{1}{mx+m^2} + \sum\frac{1}{m},$$

setzt man also:

$$\lambda = \sum \frac{1}{m} - \sum \frac{1}{n},$$

so kann man schreiben:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum \frac{x}{nx - n^2} - \sum \frac{x}{mx + m^2} + \lambda,$$

und man hat die Grenze des 2. Gliedes zu bestimmen, wenn m und n in's Unendliche wachsen. Aber die Reihen $\sum \frac{x}{nx - n^2}$, $\sum \frac{x}{mx + m^2}$ sind beide convergent, haben einzeln endliche Summen, und ihre Grenzen sind somit völlig bestimmt, wobei die Bestimmung $m = \omega n$ keinen Einfluss ausübt. Aber anders ist es in Bezug auf die Reihen $\sum \frac{1}{m}$, $\sum \frac{1}{n}$, deren Summen mit m und n in's Unendliche wachsen. λ wird also die unbestimmte Differenz zwischen 2 Unendlichkeiten, und es handelt sich darum, ihren Werth zu ermitteln. Zu dem Ende wollen wir die Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}$ durch ein bestimmtes Integral ausdrücken, wobei wir von der Relation ausgehen:

$$\int_0^1 x^{\mu - 1}\, dx = \frac{1}{\mu}$$

Man hat dann:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} = \int_0^1 dx\,(1 + x + \ldots + x^{m-1})$$
$$= \int_0^1 \frac{1 - x^m}{1 - x}\, dx,$$

Und die Differenz der beiden ähnlichen Reihen $\sum \frac{1}{m}$, $\sum \frac{1}{n}$ wird ausgedrückt durch:

$$\int_0^1 dx \frac{1 - x^m}{1 - x} - \int_0^1 dx \frac{1 - x^n}{1 - x} = \int_0^1 dx \frac{x^n - x^m}{1 - x}.$$

Nun ist noch der Werth dieses Integrals für $m = \omega n$ und $n = \infty$ zu bestimmen. Man erhält ihn vermittelst der sehr einfachen Transformation

$$x = 1 - \frac{z}{n}.$$

Dann ergiebt sich:

$$\int_0^1 dx \frac{x^n - x^m}{1 - x} = \int_n^0 dz \frac{\left(1 - \frac{z}{n}\right)^{\omega n} - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n}{z}$$

$$= \int_0^n dz \frac{\left(1 - \frac{z}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{\omega n}}{z}$$

und wenn n unendlich wird, kommt das bekannte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-\omega z}}{z} dz = \lg \omega$$

die durch λ bezeichnete Grösse hat also den Werth $\lg \omega$ und verschwindet nur für $\omega = 1$, in diesem Falle wird Gleichung 2):

$$\frac{\varphi' x}{\varphi x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-m}$$

$$+ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x+m}$$

Es ist klar, dass diese beiden unendlichen Reihen durch folgende convergente Reihe ersetzt werden können:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-4} + \ldots + \frac{2x}{x^2-m^2} + \ldots$$

Die Summe derselben ist $\pi \cot \pi x$. Aber im Allgemeinen, so lange das Verhältniss ω zwischen m und n willkürlich ist, hat man:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \pi \cot \pi x + \lg \omega.$$

also:

$$\int dx \frac{\varphi' x}{\varphi x} = \lg \sin \pi x + x \lg \omega + \text{const.}$$

und also:

$$\varphi(x) = C\, e^{x \lg . \omega} \sin \pi x,$$

wo C eine Constante ist.

Dieses Resultat macht die eigenthümliche Unbestimmtheit klar, welche der Ausdruck $\prod x \left(1 + \frac{x}{m}\right)$ hat, und kann dazu dienen, die analoge Eigenschaft in Bezug auf den doppelt unendlichen Ausdruck $\prod x \left(1 + \frac{x}{am + bn}\right)$ verständlich zu machen, dessen allgemeiner Werth erhalten wird, indem man einen speziellen Werth

mit der Exponentialgrösse $e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ multiplicirt. Dieser spezielle Werth wird aber, wie oben gezeigt, bestimmt, indem man das Gesetz, nach welchem sich die ganzen Zahlen m und n, die man in's Unendliche wachsen lässt, ordnen, durch eine Curve angiebt. Aber von einem allgemeinen Gesichtspunkt aus kann man fragen, ob es eindeutige und ganze Funktionen giebt, welche 2 Perioden haben. Dies ist der Gegenstand des folgenden, von Liouville herrührenden Satzes, auf welchem dieser ausgezeichnete Mathematiker eine vollständige Theorie der doppelt periodischen Funktionen gegründet hat.*)

IV. Liouville'scher Satz.

Dieser Satz sagt uns, dass jede eindeutige Funktion f (x), welche 2 Perioden a und b hat, sich nothwendig auf eine Constante reducirt, wenn sie für keinen Werth der Variablen unendlich wird. Um dies zu beweisen, gehen wir von dem allgemeinen Ausdruck jeder ganzen eindeutigen Funktion mit Periode a aus:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m \, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}.$$

Die Bedingung $f(x+b) = fx$ giebt die Gleichung:

$$\sum A_m \, e^{2m\frac{i\pi b}{a}} \, e^{2m\frac{i\pi x}{a}} = \sum A_m \, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}.$$

Multiplicirt man beide Glieder mit $e^{-2n\frac{i\pi x}{a}}$ und integrirt in den Grenzen 0 und a, so erhält man:

$$A_n \, e^{2n\frac{i\pi b}{a}} = A_n.$$

Hieraus folgt, dass $A_n = 0$ ist. Denn da das Verhältniss der beiden Perioden $\frac{b}{a}$ imaginär ist, kann nicht $e^{2n\frac{i\pi b}{a}} = 1$ sein, ausser wenn $n = 0$ ist. Also A_n ist $= 0$ für jeden Werth von n ausser für $n = 0$, und f (x) reducirt sich auf die Constante A_0. —

Dieser eben so wichtige als einfache Satz zeigt, dass die doppelt periodischen Funktionen nothwendiger Weise Transcendenten von

---

*) Ueber diesen Gegenstaud giebt das Werk von Briot und Bouquet Auskunft: Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques. Paris, Mallet-Bachelier.

Bruchform sein werden; er giebt a priori über die Eigenthümlichkeiten Auskunft, welche die Natur der doppelt unendlichen Produkte $\prod x\left(1+\frac{x}{ma+nb}\right)$ darbietet, ferner zeigt er die Unmöglichkeit doppelt periodischer Funktionen aus dem allgemeinen Ausdrucke:

$$\varphi(x)\,\varphi(x-a)\,\varphi(x-2a)\,\varphi(x-3a)\ldots\varphi(x+a)\,\varphi(x+2a)\,\varphi(x+3a)$$

entstehen zu lassen, indem man für φx eine ganze periodische Funktion nimmt. Aber obgleich diese Ausdrücke keine doppelt periodischen Funktionen geben, so geben sie doch die Zähler und Nenner derselben, und hiermit treten wir im eigentlichen Sinne in die Untersuchung der elliptischen Funktionen ein.

C. Addition der Funktionen Θ (x), H (x), ihr Ausdruck in Produkten und Reihen.

Höchst wichtig und interessant ist die genaue Untersuchung derjenigen Kunstgriffe, durch welche man, von den oben auseinander gesetzten Grundbegriffen ausgehend, zur Kenntniss einer neuen Funktion gelangt, aus welcher eine ganz neue Reihe analytischer Begriffe entsteht; und ein vollständiges Handbuch über diesen unsern Gegenstand dürfte keine dieser Methoden ausschliessen, welche in Bezug auf die Funktionen Θ (x) und H (x) entdeckt und benutzt worden sind. Hier aber werden wir nur zwei geben, deren eine sich naturgemäss an das Vorhergehende anschliesst, und deren andere uns dazu führen wird, einen Abriss von den analogen Funktionen mit mehreren Variablen und von einer höhern Ordnung zu geben, welche man Abelsche oder hyperelliptische Funktionen nennt.

I. Erste Methode.

Wir bedienen uns in dem Folgenden derjenigen Bezeichnungen, welche Jacobi in seinem unsterblichen Werke: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum angewandt hat, und benennen die Grössen, welche als Perioden dienen, mit K und iK', wo $i=\sqrt{-1}$

ist. Indem unter φ (x) eine ganze Funktion mit der Periode 2K verstanden wird, betrachten wir statt der Ausdrücke

$$\varphi(x)\,\varphi(x-iK')\,\varphi(x-2iK')\ldots\varphi(x+iK')\,\varphi(x+2iK')\ldots,$$

von denen wir wissen, dass sie nicht zur Definition einer völlig bestimmten Funktion dienen können, den folgenden:

$$\Phi(x)=\varphi(x+iK')\,\varphi(x+3iK')\,\varphi(x+5iK')\ldots$$
$$\varphi(-x+iK')\,\varphi(-x+3iK')\,\varphi(-x+5iK')\ldots.$$

Man hat zunächst

$$\Phi(x+2K)=\Phi(x),$$

und es ergiebt sich unmittelbar

$$\Phi(x+2iK')=\Phi(x)\frac{\varphi(-x-iK')}{\varphi(x+iK')}.$$

Man kommt also auf keine doppelte periodische Funktion, aber diese neue Art von Ausdrücken führt, wie wir sehen werden, auf vollständig definirte und bestimmte Funktionen.

Sei z. B. die ganze Funktion, welche 2K zur Periode hat:

$$\varphi(x)=1-e^{\frac{i\pi x}{K}},$$

so hat man

$$\frac{\varphi(-x-iK')}{\varphi(x+iK')}=-e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}.$$

Setzt man noch:

$$q=e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

so ergiebt sich:

$$\varphi[x+(2m+1)iK']\,\varphi[-x+(2m+1)iK']$$
$$=1-2q^{2m+1}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{4m+2}$$

und also:

$$\Phi(x)=\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)$$
$$\left(1-2q^5\cos\frac{\pi x}{K}+q^{10}\right)\ldots.$$

Wenn der Modul von q kleiner als 1 ist, so stellt dies Produkt eine vollständig definirte und bestimmte Funktion dar, denn die logarithmische Ableitung giebt folgende Reihe:

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{2\pi}{K} \sin \frac{\pi x}{K} \left(\frac{q}{1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6} + \frac{q^5}{1 - 2q^5\cos\frac{\pi x}{K} + q^{10}} + \dots \right)$$

welche im angenommenen Falle immer convergent ist, welchen reellen oder imaginären Werth die Variable x auch habe.

Indem wir als Factor eine Constante A einführen, setzen wir mit Jacobi:

$$\Theta(x) = A\,\Phi(x)$$

oder:

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A\,(1 - 2q\cos 2x + q^2)\,(1 - 2q^3\cos 2x + q^6)\,(1 - 2q^5\cos 2x + q^{10}) \dots$$

Dies ist die erste der von uns zu definirenden Funktionen. Sie erfüllt die Relationen:

$$1)\quad \begin{cases} \Theta(x + 2K) = \Theta(x), \\ \Theta(x + 2iK') = -\Theta(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x + iK')}, \end{cases}$$

welche der Theorie als Grundlage dienen.

Sei 2tens:

$$H(x) = -i\,\Theta(x + iK')\, e^{\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')},$$

so findet man unmittelbar die Beziehungen, welche der vorgehenden ganz ähnlich sind:

$$2)\quad \begin{cases} H(x + 2K) = -H(x), \\ H(x + 2iK') = -H(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x + iK')} \end{cases}$$

und den entwickelten Ausdruck giebt die Formel

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A.2\sqrt[4]{q}\sin x\,(1 - 2q^2\cos 2x + q^4)\,(1 - 2q^4\cos 2x + q^8)\,(1 - 2q^6\cos 2x + q^{12}) \dots$$

Dies ist die 2. unserer fundamentalen Funktionen; indem man sie durch die erste dividirt, erhält man eine doppelt periodische Funk-

tion, denn wegen der Relationen 1) und 2) genügt der Quotient $\frac{H(x)}{\theta(x)}$ den Bedingungen:

$$\frac{H(x+2K)}{\theta(x+2K)} = -\frac{H(x)}{\theta(x)},$$

$$\frac{H(x+4K)}{\theta(x+4K)} = \frac{H(x)}{\theta(x)},$$

$$\frac{H(x+2iK')}{\theta(x+2iK')} = \frac{H(x)}{\theta(x)}.$$

Setzen wir noch

$$\theta_1(x) = \theta(x+K),$$

$$H_1(x) = H(x+K),$$

d. h.

$$\theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A\,(1+2q\cos 2x+q^2)\;(1+2q^3\cos 2x+q^6)\;(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$

$$H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A.2\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x+q^4)\;(1+2q^4\cos 2x+q^8)\;(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots.$$

Diese beiden neuen Funktionen führen zu den Beziehungen:

3) $$\begin{cases} \theta_1(x+2K) = \theta_1(x), \\ \theta(x+2iK') = \theta_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}, \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} H_1(x+2K) = -H_1(x), \\ H_1(x+2iK') = H_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}, \end{cases}$$

derart, dass die Quotienten $\frac{H_1(x)}{\theta(x)}$, $\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}$ auch doppelt periodische Funktionen sind, von denen jede zur Vorhergehenden in ähnlicher Beziehung steht, wie der Sinus zum Cosinus, und die das System der 3 neuen Transcendenten bilden, deren Untersuchung die Theorie der elliptischen Funktionen bildet. Wir werden sie unter eine andere analytische Form bringen, vermöge welcher sie sich an die hyperelliptischen Transcendenten mit mehreren Variablen und vielfacher Periodicität anschliessen. Aber diese erste Methode hat den Vortheil, unmittelbar die unendlich vielen Wurzeln der transcen-

denten Gleichungen zu geben, welche man erhält, indem man jede dieser Funktionen gleich Null setzt, nämlich:

$$\Theta(x) = 0, \quad x = 2mK + (2m'+1)iK',$$

$$H(x) = 0, \quad x = 2mK + 2m'iK',$$

$$\Theta_1(x) = 0, \quad x = (2m+1)K + (2m'+1)iK',$$

$$H_1(x) = 0, \quad x = (2m+1)K + 2m'iK',$$

wo m und m' beliebige ganze Zahlen sind. Zu den verschiedenen so eben gegebenen Grundbeziehungen fügen wir noch die folgenden, welche oft angewandt werden, hinzu:

$$\Theta(x + iK') = i\,H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

$$H(x + iK') = i\,\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

$$\Theta_1(x + iK') = H_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

$$H_1(x + iK') = \Theta_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}.$$

Endlich machen wir noch darauf aufmerksam, dass diese Beziehungen sich nicht ändern, wenn man für x λx, für K und K' λK und $\lambda K'$ setzt, so dass man eine der Perioden beliebig annehmen, also z. B. $K = 1$ setzen kann. Denn von diesem speciellen Fall wird man sogleich zu unsern allgemeinen Ausdrücken zurückgeführt. Aber diese Specialisirung ist von der, welche wir gebrauchen werden, verschieden. Wir werden von der letzteren sprechen, sobald sie sich naturgemäss darbietet.

II. Zweite Methode.

Der Liouville'sche Satz, dass eine eindeutige ganze Funktion $\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$, mit der Periode a nicht gleichzeitig eine Periode b haben kann, ohne sich auf eine Constante zu reduciren, führt naturgemäss dazu, den analytischen Ausdruck der doppelten periodischen Funktion unter der Bruchform

$$\frac{\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\sum B_m a^{2m\frac{i\pi x}{a}}}$$

zu suchen.

Versuchen wir also A_m und B_m durch die Bedingung zu bestimmen:

$$\frac{\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\sum B_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}} = \frac{\sum A_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)}}{\sum B_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)}},$$

wo b die 2. Periode ist.

Sei der Abkürzung wegen

$$q = e^{i\pi\frac{b}{a}},$$

durch Wegschaffen der Nenner erhält man:

$$\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}} \sum B_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)}$$
$$= \sum B_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}} \sum A_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)},$$

und in dieser neuen Gleichung sind die Coefficienten derselben Exponentialgrösse $e^{\frac{2\mu i\pi x}{a}}$ gleich zu setzen. Man erkennt aber sogleich, dass diese Coefficienten die Reihen bilden:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_{(\mu-m)} B_m q^{2m} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{(\mu-m)} B_m q^{2(\mu-m)}$$

derart, dass, wenn man für den Augenblick n statt m als Index des allgemeinen Gliedes der 2. Reihe setzt, man auf folgende Gleichung kommt, welche für jeden Werth von μ gilt:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_{(\mu-m)} B_m q^{2m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{(\mu-n)} B_n q^{2(\mu-n)}.$$

Es könnte schwierig scheinen, hieraus die unbekannten Funktionen A_m und B_m in ihrer ganzen Allgemeinheit zu finden. Hier werden wir uns darauf beschränken, diejenige Auflösung zu suchen, welche sich von selbst darbietet, und die darin besteht, die Gleichheit der

Reihen zu erhalten, indem man sie identisch macht. Zu dem Ende setzen wir:

$$A_{(\mu-m)} B_m q^{2m} = A_{(\mu-n)} B_n q^{2(\mu-n)}$$

und nehmen an, dass n als Funktion von m gegeben sei, derart, dass diese beiden Grössen gleichzeitig die vollständige Reihe der ganzen Zahlen darstellen können. Dies geschieht, wenn man setzt:

$$n = m + k,$$

wo k eine ganze Zahl ist, und nachdem man die vorige Gleichung unter die Form gebracht hat:

$$\frac{A_{\mu-m}}{q^{2(\mu-n)} A_{\mu-n}} = \frac{B_n}{q^{2m} B_m}$$

wird man finden:

$$\frac{A_{(\mu-m)}}{q^{2(\mu-m-k)} A_{(\mu-m-k)}} = \frac{B_{(m+k)}}{q^{2m} B_m}.$$

Da aber die Gleichung erfüllt wird, was auch μ sei, so kann man setzen:

$$\mu - m - k = m',$$

wo m' eine ganze von m unabhängige Zahl ist. Dies giebt:

$$\frac{A_{(m'+k)}}{q^{2m'} A_{m'}} = \frac{B_{(m+k)}}{q^{2m} B_m},$$

woraus man erkennt, dass jedes Glied gleich einer Constanten ist. Die unbekannten Funktionen A_m und B_m sind mithin 2 Auflösungen derselben Differenzengleichung:

$$\frac{z_{(m+k)}}{q^{2m} z_m} = \text{const.},$$

deren allgemeines Integral ist:

$$z_m = q^{\frac{m^2}{k} + \alpha m} a_m,$$

wo α von der Constante des 2. Gliedes abhängig ist, und a_m die Bedingung erfüllen muss:

$$a_{m+k} = a_m.$$

Wie man sieht, kann die Grösse α spezialisirt werden, ohne die Allgemeinheit des Resultats aufzugeben. Denn man findet die letztere wieder, wenn man $x + \beta$ für x in die Funktion einsetzt. Wir setzen $\alpha = 0$ und erhalten für A_m und B_m die folgenden Werthe:

$$A_m = a_m\, q^{\frac{m^2}{k}}$$

$$B_m = b_m\, q^{\frac{m^2}{k}},$$

wo a_m und b_m die Bedingungen erfüllen:

$$a_{(m+k)} = a_m\,,$$
$$b_{(m+k)} = b_m\,.$$

Setzt man also:

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m\, q^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_m\, q^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

so wird der Quotient $\frac{\Phi'(x)}{\Pi(x)}$ der Ausdruck für eine doppelt periodische Funktion sein, welche durch unsere Analysis gegeben ist, und es handelt sich jetzt darum, die merkwürdigen Reihen, auf welche wir für den Zähler und den Nenner gekommen sind, genauer zu untersuchen. Was zunächst die Convergenz anbetrifft, so wird, wenn man, wie wir gethan haben, den Modul von q kleiner als 1 annimmt, die ganze Zahl k, welche sonst willkürlich bleibt, offenbar positiv angenommen werden müssen. Dies zugegeben, werden die beiden in Rede stehenden Reihen, da sie nach quadratischen Potenzen von q fortschreiten, für alle reellen und imaginären Werthe der Variablen sehr rasch convergiren, und zwar so rasch, wie noch an keinem Beispiele in der Analysis bisher vorgekommen ist. Um demnächst zu sehen, wie sich die doppelte Periodicität des Quotienten ergiebt, wollen wir z. B. im Zähler $x + b$ für x setzen. Man erhält dann

$$\Phi(x+b) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi}{a}(x+b)}$$

oder

$$\Phi(x+b) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{k}+2m}\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

mit Berücksichtigung des Werthes von $q = e^{\frac{i\pi b}{a}}$. Aber man kann

im allgemeinen Gliede für m m—k setzen, weil der Index alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt Indem man also $a_{(m-k)} = a_m$ setzt, findet man:

$$\Phi(x+b) = \sum a_m\, q^{\frac{(m-k)^2}{k} + 2(m-k)}\, e^{2(m-k)\frac{i\pi x}{a}}$$

$$= \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{k} - k}\, e^{2(m-k)\frac{i\pi x}{a}}$$

$$= q^{-k}\, e^{-2k\frac{i\pi x}{a}} \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{k}}\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

derart, dass die ursprüngliche Reihe $\Phi(x)$ sich als Faktor wiederfindet.

Diese Grundbeziehung bringen wir unter folgende Form:

$$\Phi(x+b) = \Phi(x)\, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)}$$

und in Rücksicht darauf, dass wir sie erhalten haben, ohne irgend wie die willkürlichen Coefficienten a_m zu bestimmen, können wir hinzufügen:

$$\Pi(x+b) = \Pi(x)\, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)}.$$

Hieraus zeigt sich auf's Klarste, wo die doppelte Periodicität des Quotienten der beiden Funktionen $\Phi(x)$ und $\Pi(x)$ herrührt. Jede der beiden hat die Periode a, und wenn man $x+b$ für x setzt, kommt nur eine beiden gemeinsame Exponentialgrösse als Faktor hinzu, welcher durch die Division wieder verschwindet.*)

Man wird bald die wichtige Rolle erkennen, welche die ganze Zahl k spielt. Durch sie werden in den Zähler und den Nenner k willkürliche Constanten eingeführt, zufolge der Bedingnngen

$$a_{(m+k)} = a_m,$$
$$b_{(m+k)} = b_m.$$

---

*) Wenn k eine grade Zahl ist, kann man nachfolgende Relation merken: Es sei

$$\Phi_0(x) = \sum a_{(m+\frac{1}{2}k)}\, q^{\frac{m^2}{k}}\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

eine Funktion, die nur darin sich von $\Phi(x)$ unterscheidet, dass die Coefficienten a_m in einer andern Ordnung vertheilt sind. Man hat dann:

$$\Phi\left(x+\frac{b}{2}\right) = \Phi_0(x)\, e^{-\frac{ki\pi}{2a}(2x+b)}.$$

Wir müssen jedoch jetzt bemerken, dass es unmöglich ist, den Bedingungen:

$$\Phi(x+a) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x+b) = \Phi(x)\, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)}$$

durch andere eindeutige ganze Funktionen zu genügen, als durch die vorstehende Reihe. Setzt man nämlich unter dieser Annahme

$$\Phi(x) = \sum A_m\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

oder vielmehr

$$\Phi(x) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{k}}\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

um die erste Bedingung zu erfüllen, so wird, wenn man dies in die 2. Gleichung einsetzt und die Coefficienten derselben Exponentialgrösse mit einander vergleicht, $a_{(m+k)} = a_m$. Bevor wir weiter geben, wollen wir eine kleine Abschweifung machen, und darin einige Worte über eine ebenso merkwürdige als wichtige Verallgemeinerung der obigen Reihe sagen.

III. Bemerkung über die Funktionen mehrerer Variablen mit vielfacher Periodicität.

Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von n Variablen kann nicht allein in Bezug auf jede Variable für sich betrachtet, periodisch sein, sondern auch in Bezug auf Alle zusammen, wenn sie eine Gleichung von folgender Form erfüllt:

$$f(x_1+a_1, x_2+a_2 \ldots x_n+a_n) = f(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Unter diesem allgemeineren Gesichtspunkt ergiebt sich zunächst der Satz, dass eine eindeutige Funktion von n Variablen höchstens 2n gleichzeitige Perioden haben kann.*)

Aber äusserst bemerkenswerth ist es, und man verdankt diese schöne analytische Entdeckung Riemann in Göttingen, dass bei eindeutigen oder vollständig bestimmten Funktionen die 2n gleichzeitigen Perioden nicht a priori gegebene, d. h. von einander unab-

*) Ist es eine ganze Funktion, so hat sie höchstens n Perioden.

hängige Grössen sein können. Bildet man in der That mit n gleichzeitigen passend gewählten Perioden:

$$\begin{array}{l} a_1, a_2 \dots a_n, \\ b_1, b_2 \dots b_n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_1, g_2 \dots g_n, \end{array}$$

die n linearen Funktionen:

$$\begin{array}{l} X_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + g^1 x_n, \\ X_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + g_2 x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n = a_n x_1 + b_n x_2 + \dots + g_n x_n, \end{array}$$

und setzt:

$$f(X_1, X_2 \dots X_n) = F(x_1, x_2 \dots x_n),$$

so hat man eine transformirte Funktion, die in Bezug auf jede Variable periodisch ist, aber ausserdem n andere gleichzeitige Perioden besitzt, und in Bezug auf die letztern, zeigt sich in einfachster Weise die folgende Beziehung.

Bezeichnen wir sie mit:

$$\begin{array}{l} A_1, A_2 \dots A_n, \\ B_1, B_2 \dots B_n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_1, G_2 \dots G_n. \end{array}$$

Der Riemann'sche Satz besteht darin, dass die Glieder dieser Zusammenstellung, welche symmetrisch in Bezug auf die Diagonale: $A_1, B_2 \dots G_n$ liegen, unter sich gleich sind, oder, was dasselbe ist, darin, dass die linearen Funktionen

$$\begin{array}{l} A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n, \\ B_1 x_1 + B_2 x_2 + \dots + B_n x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G_1 x_1 + G_2 x_2 + \dots + G_n x_n, \end{array}$$

partielle Ableitungen einer und derselben quadratischen Form mit n veränderlichen Grössen sind. Das Folgende ist die Verallgemeinerung der Reihen, welche sich auf die doppelt periodischen Funktionen bezogen, sie giebt den analytischen Ausdruck für die analogen Funktionen mit n Variablen und 2n gleichzeitigen Perioden.

Die quadratische Form, von der wir so eben gesprochen haben, sei $= \varphi\ (x_1, x_2 \ldots x_n)$, und setzen wir

$$\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum a_{(m_1, m_2 \ldots)}\, e^{2 i\pi (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots) + \frac{i\pi}{k} \varphi (m_1, m_2 \ldots)}$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ der n Indices $m_1, m_2 \ldots m_n$ bezieht, und der constante Coefficient $a_{(m_1, m_2 \ldots m_n)}$ der Bedingung unterworfen ist, dass er denselben Werth wieder annimmt, wenn man einen beliebigen Index um die ganze Zahl k vermehrt. Diese Funktion ist offenbar periodisch in Bezug auf jede Variable für sich betrachtet, und Folgendes ist die Grundeigenschaft, welche sie mit den elliptischen Reihen verbindet. —

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ n willkürliche ganze Zahlen, so hat man:

$$\Phi\left(x_1 + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_1},\ x_2 + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_2} \ldots x_n + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_n}\right)$$
$$= \Phi\ (x_1, x_2 \ldots x_n)\ e^{-ki\pi [2\alpha_1 x_1 + 2\alpha_2 x_2 + \ldots + \varphi (\alpha_1, \alpha_2 \ldots)]}.$$

Da diese Beziehung die Constante $a_{(m_1, m_2 \ldots m_n)}$ nicht enthält, so wird eine andere Reihe $\Pi\ (x_1, x_2 \ldots x_n)$, wo die Constanten anders bestimmt sind, in gleicher Weise geben:

$$\Pi\left(x_1 + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_1},\ x_2 + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_2} \ldots x_n + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_n}\right)$$
$$= \Pi\ (x_1, x_2 \ldots x_n)\ e^{-ki\pi [2\alpha_1 x_1 + 2\alpha_2 x_2 + \ldots + \varphi (\alpha_1 \alpha_2 \ldots)]},$$

woraus folgt, dass der Quotient $\dfrac{\Phi\ (x_1, x_2 \ldots x_n)}{\Pi\ (x_1, x_2 \ldots x_n)}$ eine Funktion mit n Variablen und 2n Perioden darstellt, von denen n der Einheit gleich sind, und jeder Variablen besonders angehören, die übrigen n die Glieder der Zusammenstellung sind, aus welcher die quadratische Form $\varphi\ (x_1, x_2 \ldots x_n)$ abgeleitet wurde. Sie ergeben sich in der That aus den voranstehenden Gleichungen, wenn man darin die ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ nach und nach gleich Null setzt, mit Ausnahme einer einzigen, die gleich Eins gesetzt wird. In den Reihen kommt auch eine ganze Zahl k vor, wovon die Anzahl der willkürlichen Constanten abhängt, welche darin enthalten sind. Aber diese Anzahl ist begrenzt und bestimmt, wenn die folgende Bedingung, deren Entdecker ebenfalls Riemann ist, erfüllt wird.

Sei

$$\begin{array}{c} p_1, p_2 \ldots p_n, \\ q_1, q_2 \ldots q_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_1, s_2 \ldots s_n, \end{array}$$

ein System von n^2 willkürlichen Constanten, so ist es nothwendig und ausreichend, dass die Funktionen

$$\begin{array}{c} f(x_1 + p_1, x_2 + p_2 \ldots x_n + p_n), \\ f(x_1 + q_1, x_2 + q_2 \ldots x_n + q_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_1 + s_1, x_2 + s_2 \ldots x_n + s_n), \end{array}$$

gleich Null oder gleich unendlich gesetzt, nur eine bestimmte und endliche Anzahl von Auflösungen zulassen, welche man nicht mit Rücksicht auf die Perioden, die eine auf die andere reduciren kann.

Die erste Kenntniss von diesen Reihen verdankt man Goepel und Rosenhaim, sie haben dieselben für den Fall, dass nur 2 Variablen vorhanden sind, angewandt, um die umgekehrten Funktionen der Integrale von Quadratwurzeln zu finden, welche Polynome fünften und sechsten Grades enthalten. Weierstrass, indem er weit über die von beiden ausgezeichneten Mathematikern erreichten Ergebnisse hinausging, löste mit Hülfe derselben Reihen das Problem der Umkehrung der Integrale von Quadratwurzeln aus Polynomen von beliebigem Grade in seiner ganzen Allgemeinheit. Nach ihm gelangte auf einem ganz verschiedenen Wege Riemann zu demselben Resultate, und in dem noch viel weitern Felde der Transcendenten mit beliebigen algebraischen Differenzialen begegneten sich diese beiden grossen Mathematiker abermals, indem sie gleichzeitig das so allgemeine Problem der Umkehrung von Integralen beliebiger algebraischer Funktionen lösten, eine der schönsten und wichtigsten Untersuchungen, die jemals in der Analysis vorgekommen sind.

IV. Vergleich zwischen den Ausdrücken der Funktionen Θ und H in Form von unendlichen Produkten und Reihen.

Wir haben in einem flüchtigen Ueberblick die Verbindung und Analogie zwischen den Reihen gezeigt, welche doppelt periodische Funktionen mit einer Variablen geben, und denjenigen, welche zu den allgemeinern Abel'schen Transcendenten führen. Der einfachste

Fall, mit dem wir uns nun ausschliesslich beschäftigen werden, ist jedoch der einzige, wo eine Zerlegung in Factoren stattfindet, was im allgemeinern Falle, wo die Reihen 2 oder mehrere Variablen enthalten, in keiner Weise geschieht. Die Zurückführung beider Arten von Ausdrücken auf einander macht sich ganz von selbst, und folgt aus den Beziehungen, die wir oben gegeben haben, und hier nochmals zusammenstellen wollen:

$$\Theta(x+2K) = \Theta(x), \qquad \Theta(x+2iK') = -\Theta(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

$$H(x+2K) = -H(x), \qquad H(x+2iK') = -H(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

$$\Theta_1(x+2K) = \Theta_1(x), \qquad \Theta_1(x+2iK') = \Theta_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

$$H_1(x+2K) = -H_1(x), \qquad H_1(x+2iK') = H_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')};$$

hieraus folgt unmittelbar:

$$\Theta(x+4K) = \Theta(x), \qquad H(x+4K) = H(x).$$

Die Funktionen $\Theta(x)$ und $H(x)$ erfüllen beide also die Bedingungen

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x+2iK') = -\Phi(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

und die Funktionen $\Theta_1(x)$ $H_1(x)$ aus ähnlichen Gründen die folgenden:

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x+2iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}.$$

Dies sind aber dieselben Bedingungen, denen der allgemeine Ausdruck genügt:

$$\Phi(x) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{k}}\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

wenn man darin k gleich 2 setzt und als Perioden annimmt:

$$a = 4K,$$
$$b = 2iK'.$$

Die Constanten a_m reduziren sich dann auf zwei, a_0 und a_1, und da sie, wie wir gezeigt haben, hinreichen, die allgemeinste Auflösung dieser Gleichungen durch ganze Funktionen darzustellen, indem man ihnen passende Werthe giebt, so sind die beiden Funktionen $\Theta_1(x)$ und $H_1(x)$ durch folgende Reihe bestimmt:

$$\sum a_m\, q^{\frac{m^2}{2}}\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}} = a_0 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{m^2}\, e^{m\frac{i\pi x}{K}}$$

$$+\, a_1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\, e^{(2m+1)\frac{i\pi x}{2K}}$$

Diese Bestimmung folgt übrigens unmittelbar aus den Bedingungen:

$$\theta_1 (x + 2K) = \theta_1 (x),$$
$$H_1 (x + 2K) = - H_1 (x).$$

In der That sieht man, dass die mit a_0 und a_1 multiplicirten Reihen, bezüglich die erstere und die zweite Bedingung erfüllen, derart, dass man hat:

$$\alpha\, \theta_1 (x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{m^2}\, e^{2m\frac{i\pi x}{K}},$$

$$\beta\, H_1 (x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{\left(\frac{2m+1}{4}\right)^2}\, e^{(2m+1)\frac{i\pi x}{2K}},$$

wo α und β Constanten sind. Ersetzt man die Exponentialgrössen durch trigonometrische, und die Variable x durch $\frac{2Kx}{\pi}$, so erhält man folgende merkwürdige Entwickelungen:

$$\alpha\, \theta_1 \left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \ldots$$

$$\beta\, H_1 \left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots$$

Indem man hier x durch $x + \frac{\pi}{2}$ ersetzt, erhält man noch:

$$\alpha\, \theta \left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \ldots$$

$$b\, H \left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots$$

Aus der Beziehung

$$\theta_1 (x + iK') = H_1 (x)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')}$$

ergiebt sich noch, dass die beiden Constanten α und β einander

gleich sind. — Dies sind die Identitätsbeziehungen zwischen den unendlichen Reihen und Produkten, sie sind vom grössten Interesse und können auch auf verschiedenen anderen Wegen gefunden werden. Jakobi, ihr erster Entdecker, und Cauchy haben deren mehrere ganz elementare angegeben, am meisten ist dies jedoch der folgende, der von Cauchy herrührt.

Wir betrachten mit diesem berühmten Mathematiker das ganze unendliche Polynom:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= (1+z)(1+qz)(1+q^2z)\dots(1+q^{n-1}z)\\ &= 1+A_1z+A_2z^2+\dots+A_nz^n.\end{aligned}$$

Die identische Beziehung:

$$(1+z)\,\varphi(qz) = (1+q^nz)\,\varphi z$$

ergiebt folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}A_1(1-q) &= 1-q^n,\\ A_2(1-q^2) &= A_1(q-q^n),\\ A_3(1-q^3) &= A_2(q^2-q^n);\\ &\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar ergiebt:

$$A_i = q^{\frac{i(i-1)}{2}}\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-i+1})}{(1\quad q)(1-q^2)\dots(1-q^i)}.$$

Verstehen wir jetzt für einen Augenblick unter $\Phi(z)$ dasjenige, was aus $\varphi(z)$ wird, wenn man q^2 für q setzt, $2n$ für n, und $\frac{z}{q^{2n-1}}$ für z. Setzt man nun:

$$\Phi(z) = 1+a_1z+a_2z^2+\dots+a_{2n}z^{2n},$$

so erhält man leicht a_i mittelst A_i, und indem man den Index $n+i$ einführt, ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$a_{(n+i)} = q^{i^2-n^2}\frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\dots(1-q^{2n-2i+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n+2i})}.$$

Die Zahl i kann alle Werthe von $-n$ bis $+n$ annehmen, man kann sich aber z. B. auf die positiven Werthe beschränken, denn man findet leicht die Beziehung:

$$a_{(n-i)} = a_{(n+i)}.$$

$\Phi(z)$ nimmt so folgende Form an:

$$\Phi(z) = a_n z^n + a_{(n+1)}(z^{n-1} + z^{n+1}) + a_{(n+2)}(z^{n-2} + z^{n+2}) + \ldots$$
$$+ a_{2n}(1 + z^{2n})$$

oder:

$$\Phi(z) = a_n z^n \left[1 + \frac{a_{(n+1)}}{a_n}(z + z^{-1}) + \frac{a_{(n+2)}}{a_n}(z^2 + z^{-2}) + \ldots\right]$$

Kommen wir jedoch auf den Werth von $\Phi(z)$ unter der Produktform zurück, und bemerken wir zunächst, dass wenn man q durch q^2, und n durch $2n$ in $\varphi(z)$ ersetzt, sich ergiebt:

$$(1+z)(1+q^2 z)(1+q^4 z)\ldots(1+q^{4n-2} z)$$
$$= [(1+z)(1+q^2 z)\ldots(1+q^{2n-2} z)]$$
$$[(1+q^{2n} z)(1+q^{2n+2} z)(1+q^{2n+4} z)\ldots(1+q^{4n-2} z)],$$

so dass, wenn man schliesslich $\frac{z}{q^{2n-1}}$ für z setzt, erhalten wird:

$$\Phi(z) = \left[\left(1 + \frac{z}{q^{2n-1}}\right)\left(1 + \frac{z}{q^{2n-3}}\right)\cdots\left(1 + \frac{z}{q}\right)\right]$$
$$\times [(1+qz)(1+q^3 z)\ldots(1+q^{2n-1} z)].$$

Die Faktoren des ersten Produkts kann man noch anders schreiben, es ist nämlich:

$$1 + \frac{z}{q} = \frac{z}{q}\left(1 + \frac{q}{z}\right),$$
$$1 + \frac{z}{q^3} = \frac{z}{q^3}\left(1 + \frac{q^3}{z}\right),$$
$$1 + \frac{z}{q^5} = \frac{z}{q^5}\left(1 + \frac{q^5}{z}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dies giebt für $\Phi(z)$ den neuen Werth:

$$\Phi(z) = \frac{z^n}{q^{n^2}}\left(1 + \frac{q}{z}\right)\left(1 + \frac{q^3}{z}\right)\ldots\left(1 + \frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$
$$(1 + qz)(1 + q^3 z)\ldots(1 + q^{2n-1} z).$$

Dies ist die schliessliche Form des Produktes von Faktoren, wovon wir die Entwickelung nach Potenzen von z bereits haben. Sei, der Abkürzung wegen:

$$a_n = \frac{\mathfrak{A}_n}{q^{n^2}}, \quad \frac{a_{(n+i)}}{a_n} = \alpha_i q^{i2},$$

d. h.

$$\mathfrak{A}_n = \frac{(1-q^{4n})\,(1-q^{4n-2})\ldots(1-q^{2n+2})}{(1-q^2)\,(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})},$$

$$\mathfrak{a}_i = \frac{(1-q^{2n})\,(1-q^{2n-2})\ldots(1-q^{2n-2i+2})}{(1-q^{2n+2})\,(1-q^{2n+4})\ldots(1-q^{2n+2i})}.$$

Die algebraische Identität, die wir entwickelt haben, nimmt dann die Form an:

$$\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$
$$(1+qz)\,(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z)$$
$$=\mathfrak{A}_n[1+\mathfrak{a}_1 q(z+z^{-1})+\mathfrak{a}_2 q^4(z^2+z^{-2})+\ldots+\mathfrak{a}_n q^{n^2}(z^n+z^{-n})],$$

und, wenn man $z = e^{2ix}$ setzt:

$$(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots(1+2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2})$$
$$=\mathfrak{A}_n\,(1+2\mathfrak{a}_1 q\cos 2x+2\mathfrak{a}_2 q^4\cos 4x+\ldots+2\mathfrak{a}_n q^{n^2}\cos 2nx),$$

für unendliches n aber hat man:

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\,(1-q^8)\ldots}$$
$$\mathfrak{a}_i = 1,$$

und die algebraische Identität giebt uns die wichtige Eigenschaft der Transcendente $\Theta_1(x)$, welche in der Relation enthalten ist:

$$(1+2q\cos 2x+q^2)\,(1+2q^3\cos 2x+q^6)\,(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$
$$=\frac{1+2q\cos x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots}{(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\ldots}$$

Dies Resultat setzt uns in den Stand, die erste Definition, welche wir von den 4 Funktionen $\Theta(x)$, $H(x)$, $\Theta_1(x)$, $H_1(x)$ gegeben haben, indem wir sie durch ein Produkt von Faktoren darstellten, welches mit einem bis jetzt willkürlichen Coefficienten A behaftet war, vollständig zu präcisiren. Wir setzen nämlich:

$$A = (1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\,(1-q^8)\ldots$$

und haben also:

$$\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots$$

Hieraus und mit Hülfe der Relation:

$$\Theta_1(x+iK') = H_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}$$

ergiebt sich:

$$H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots.$$

Und diese beiden Formeln geben, wenn man $x + \frac{\pi}{2}$ für x setzt:

$$\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots.$$

Dies sind die Transcendenten, deren Eigenschaften wir entwickeln wollen in der Form von unendlichen Produkten und Reihen.

D. Ueber die beiden Hauptformen, welche unter unendlich viel andern die Functionen Θ, H u. s. w. annehmen können.

Dieser Punkt berührt den schönsten Theil der Theorie der elliptischen Funktionen, die Theorie der Transformation, welchen zu geben, uns die Grenzen dieses Abrisses nicht erlauben. Aber unabhängig von ihrem eigentlichen Interesse werden uns die Formeln, welche wir sogleich entwickeln wollen, und welche denjenigen speziellen Fall der Transformation der Funktionen θ H u. s. w. geben, wo man die Grössen K und iK' mit einander vertauscht, später unentbehrlich sein, und wir dürfen sie um so weniger übergehen, als, wie man sehen wird, sie auf die leichteste Art entwickelt werden können. Uebrigens ist dies der Weg, der zu der analogen und allgemeinen Untersuchung führt, wo man K und iK' durch $mK + m'iK'$, $nK + n'iK'$ ersetzt, wo $m\, m'\, n\, n'$ ganze Zahlen sind, und welche eben den Gegenstand der Theorie der Transformation bildet. Ist $mn' - m'n = 1$, so kommt man auf den Gegenstand, welchen Jakobi die Theorie der unendlich vielen Formen der Funktionen θ H u. s. w. nennt. Aber unter allen diesen Formen verdienen diejenigen, welche wir entwickeln und anwenden werden, ganz besondere Aufmerksamkeit. Wir setzen:

$$\vartheta\,(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,\theta\,(x),$$

$$\vartheta_1\,(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,\theta_1\,(x),$$

$$\eta(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}} H(x),$$

$$\eta_1(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}} H_1(x).$$

Man sieht unmittelbar, dass den Grundbeziehungen der Funktionen $\Theta\, H\, \Theta_1\, H_1$ nämlich:

a)
$$\begin{aligned} \Theta(x+K) &= \Theta_1(x), \\ H(x+K) &= H_1(x), \\ \Theta_1(x+K) &= \Theta(x), \\ H_1(x+K) &= -H(x); \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \Theta(x+iK') &= i\,H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}, \\ H(x+iK') &= i\,\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}, \\ \Theta_1(x+iK') &= H_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}, \\ H_1(x+iK') &= \Theta_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}. \end{aligned}$$

Die folgenden entsprechen:

c)
$$\begin{aligned} \vartheta(x+iK') &= i\,\eta(x), \\ \eta(x+iK') &= i\,\vartheta(x), \\ \vartheta_1(x+iK') &= \eta_1(x), \\ \eta_1(x+iK') &= \vartheta_1(x); \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \vartheta(x+K) &= \vartheta_1(x)\,e^{\frac{\pi}{4K'}(2x+K)}, \\ \eta(x+K) &= \eta_1(x)\,e^{\frac{\pi}{4K'}(2x+K)}, \\ \vartheta_1(x+K) &= \vartheta(x)\,e^{\frac{\pi}{4K'}(2x+K)}, \\ \eta_1(x+K) &= -\eta(x)\,e^{\frac{\pi}{4K'}(2x+K)}. \end{aligned}$$

Ersetzen wir jetzt die Gleichungen a) durch die folgenden, welche ihnen gleichbedeutend sind:

a')
$$\begin{aligned} \Theta(x-K) &= \Theta_1(x), \\ H(x-K) &= -H_1(x), \\ \Theta_1(x-K) &= \Theta(x), \\ H_1(x-K) &= H(x). \end{aligned}$$

Indem man dann die Gleichungen a') und b) mit den Gleichungen c) und d) zusammenstellt, sieht man, dass das zweite System von

Beziehungen mit dem ersten völlig übereinstimmt, wenn man darin ersetzt einerseits:

$$K \text{ und } iK'$$

bezüglich durch:

$$iK' \text{ und } -K$$

und andererseits

$$\vartheta(x), \quad \eta(x), \quad \vartheta_1(x), \quad \eta_1(x)$$

durch:

$$H_1(x), \quad \frac{1}{i} H(x), \quad \Theta_1(x), \quad \Theta(x).$$

Die neuen Funktionen, die wir eingeführt haben, sind also auf die alten zurückgeführt; bemerkt man noch, dass durch die Aenderung von K in iK' und von iK' in $-K$, die Grösse $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ in $q_0 = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$ übergeht, so erhält man die folgenden Ausdrücke, worin M und N zwei constante Factoren bezeichnen:

$$1^0) \quad \vartheta\left(\frac{2iK'x}{\pi}\right) = M 2\sqrt[4]{q_0} \cos x (1 + 2q_0^2 \cos 2x + q_0^4)$$
$$(1 + 2q_0^4 \cos 2x + q_0^8)\,(1 + 2q_0^6 \cos 2x + q_0^{12}) \ldots$$

$$i\eta\left(\frac{2iK'x}{\pi}\right) = M 2\sqrt[4]{q_0} \sin x (1 - 2q_0^2 \cos 2x + q_0^4)$$
$$(1 - 2q_0^4 \cos 2x + q_0^8)\,(1 - 2q_0^6 \cos 2x + q_0^{12}) \ldots$$

$$\vartheta_1\left(2i\frac{K'x}{\pi}\right) = M(1 + 2q_0 \cos 2x + q_0^2)\,(1 + 2q_0^3 \cos 2x + q_0^6)$$
$$(1 + 2q_0^5 \cos 2x + q_0^{10}) \ldots$$

$$\eta_1\left(2i\frac{K'x}{\pi}\right) = M(1 - 2q_0 \cos 2x + q_0^2)\,(1 - 2q_0^3 \cos 2x + q_0^6)$$
$$(1 - 2q_0^5 \cos 2x + q_0^{10}) \ldots$$

$$2^0) \quad \vartheta\left(2i\frac{K'x}{\pi}\right) = N(2\sqrt[4]{q_0} \cos x + 2\sqrt[4]{q_0^9} \cos 3x + 2\sqrt[4]{q_0^{25}} \cos 5x + \ldots)$$

$$i\eta\left(2i\frac{K'x}{\pi}\right) = N(2\sqrt[4]{q_0} \sin x - 2\sqrt[4]{q_0^9} \sin 3x + 2\sqrt[4]{q_0^{25}} \sin 5x - \ldots)$$

$$\vartheta_1\left(2i\frac{K'x}{\pi}\right) = N(1 + 2q_0 \cos 2x + 2q_0^4 \cos 4x + 3q_0^9 \cos. 6x + \ldots)$$

$$\eta_1\left(2i\frac{K'x}{\pi}\right) = N(1 - 2q_0 \cos 2x + 2q_0^4 \cos 4x - 2q_0^9 \cos 6x + \ldots)$$

Das Hauptinteresse der zweiten analytischen Form, welche uns so durch die Grössen $\vartheta(x)$ $\eta(x)$ u. s. w. gegeben ist, besteht darin,

dass man statt $\frac{2Kx}{\pi}$, das imaginäre Argument $\frac{2iK'x}{\pi}$ einführt. Setzt man K und K′ reell, so hat man den Gang der Funktionen unter reeller Form, und kann ihm immer folgen, das Argument möge reell oder mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt sein. Wir kommen bald auf eine Anwendung.

E. Grundeigenschaften der Funktionen Θ und H, Definition von sin am (x), cos am (x), Δ am (x).

Im Vorhergehenden haben wir die Funktion

$$\Phi(x) = \sum a_m q^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

für den Fall, wo k = 2 war, angewandt und gesetzt:

$$a = 4\,K,$$
$$b = 2\,i\,K'.$$

Jetzt behalten wir diese beiden Werthe als Perioden bei, und setzen mithin:

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \; a_m \; q^{\frac{m^2}{2k}} e^{m\frac{i\pi x}{2K}}$$

unter der Bedingung, dass

$$a_{(m+k)} = a_m .$$

Dies giebt, wie wir gezeigt haben, die allgemeinste Art, durch ganze eindeutige Funktionen den Bedingungen zu genügen:

$$\Phi(x + 4\,K) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x + 2\,i\,K') = \Phi(x)\, e^{-\frac{ki\pi}{2K}(x + iK')}.$$

Diese allgemeine Auflösung giebt z. B. für k = 4 vier willkürliche Constanten, man muss nämlich folgende vier Formen des Index m von einander unterscheiden m = 4 n, 4 n + 1, 4 n + 2, 4 n + 3. Dies giebt:

$$\Phi(x) = a_0 \sum q^{2n^2} e^{2n\frac{i\pi x}{K}}$$
$$+ a_1 \sum q^{\frac{(4n+1)^2}{8}} e^{(4n+1)\frac{i\pi x}{2K}}$$
$$+ a_2 \sum q^{\frac{(2n+1)^2}{2}} e^{(2n+1)\frac{i\pi x}{K}}$$
$$+ a_3 \sum q^{\frac{(4n+3)^2}{8}} e^{(4n+3)\frac{i\pi x}{2K}},$$

oder der Abkürzung wegen:

$$\Phi(x) = a_0 \Phi_0(x) + a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) + a_3 \Phi_3(x).$$

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn

$$\Phi(x + 2K) = \Phi(x)$$

ist, die Auflösung sich darstellt durch

$$\Phi(x) = a_0 \Phi_0(x) + a_2 \Phi_2(x)$$

und nur zwei willkürliche Constanten enthält. Setzt man ebenso

$$\Phi(x + 2K) = -\Phi(x),$$

so hat man mit ebenfalls zwei willkürlichen Constanten:

$$\Phi(x) = a_1 \Phi_1(x) + a_3 \Phi_3(x).$$

Somit haben wir die allgemeinste Art, den zwei Systemen von Bedingungen zu genügen:

$$\text{I.} \quad \Phi(x + 2K) = \Phi(x),$$
$$\Phi(x + 2iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+iK')};$$

$$\text{II.} \quad \Phi(x + 2K) = -\Phi(x),$$
$$\Phi(x + 2iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+iK')}.$$

Bemerken wir ferner, dass, wenn man die beiden Glieder der verschiedenen Fundamentalgleichungen auf Seite 28 in's Quadrat erhebt, man Resultat genau von der Form der ersten beiden dieser Systeme erhält, hieraus schliessen wir, dass, wenn man unter a, b u. s. w. Constanten versteht, man erhalten wird:

$$\Theta^2(x) = a\,\Phi_0(x) + b\,\Phi_2(x),$$
$$H_1^2(x) = c\,\Phi_0(x) + d\,\Phi_2(x),$$

und indem man $x + K$ für x setzt:

$$\Theta_1^2(x) = a\,\Phi_0(x) - b\,\Phi_2(x),$$
$$H^2(x) = c\,\Phi_0(x) - d\,\Phi_2(x).$$

Wenn man zweitens Glied für Glied, entweder die zwei Ersten oder die zwei Letzten derselben Gleichungen multiplicirt, so kommt man auf die Form des zweiten Systems, man hat also:

$$\Theta(x)\,H(x) = A\,\Phi_1(x) + B\,\Phi_3(x),$$

wo A und B neue Constanten bezeichnen, und diese Beziehung giebt noch, wenn man $x + K$ für x setzt:

$$\Theta_1(x)\,H_1(x) = iA\,\Phi_1(x) - iB\,\Phi_3(x).$$

Ausser verschiedenen anderen Folgerungen*) ergeben sich hieraus die algebraischen und differenziellen Beziehungen zwischen unsern Funktionen.

I. Algebraische Beziehungen. Vom Modul und seinem Complement.

Aus den Ausdrücken für $\Theta^2\,H^2\,\Theta_1^2\,H_1^2$ durch $\Phi_0(x)$ und $\Phi_2(x)$ erhält man offenbar zwei lineare Gleichungen zwischen diesen Quadraten.

Die eine nimmt die Form an:

$$\Theta^2(x) = \alpha\,H^2(x) + \alpha'\,H_1^2(x),$$

α und α' sind zu bestimmende Constanten. Zu dem Ende setzen wir $x = 0$ und $x = K$, nach den Formeln auf Seite 19 ist $H(0) = 0$, $H_1(K) = 0$, also:

$$\alpha = \frac{\Theta^2(K)}{H^2(K)},$$

$$\alpha' = \frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)}.$$

Statt α und α' führen wir aber folgende Grössen ein:

$$k = \frac{H^2(K)}{\Theta^2(K)},$$

$$k' = \frac{\Theta^2(0)}{\Theta^2(K)},$$

---

*) Die Transformation zweiter Ordnung betreffend.

und da zufolge der Beziehung

$$H(x + K) = H_1(x)$$

sich ergiebt:

$$H(K) = H_1(0),$$

so hat man

$$a = \frac{1}{k}, \quad a' = \frac{k'}{k},$$

und also:

$$k\,\theta^2(x) = H^2(x) + k'\,H_1^2(x).$$

Aus dieser ersten Relation ergiebt sich die zweite, wenn man für x setzt $x + iK'$. Wendet man zu dem Ende die Formeln auf Seite 19 an, so erhält man, indem man den Exponentialfaktor weglässt:

$$k\,H^2(x) = -\theta^2(x) + k'\,\theta_1^2(x)$$

oder:

$$\theta^2(x) = k\,H^2(x) + k'\,\theta_1^2(x).$$

Diese beiden Gleichungen stellen übrigens alle möglichen algebraischen Beziehungen zwischen unsern vier Funktionen dar, sie führen zur Kenntniss der Grössen, welche wir mit k und k' bezeichnet haben, und deren Quadratwurzeln sich auf folgende Weise durch Reihen ausdrücken lassen:

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\theta(K)} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\theta(0)}{\theta(K)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots}$$

Die erste k wird der Modul von $\theta(x)$, $H(x)$, $\theta_1(x)$, $H_1(x)$ genannt, die zweite k' das Complement des Modul. Wenn man sie als von q oder vielmehr

$$q = e^{i\pi\omega}$$

gesetzt, als von ω abhängig betrachtet, so stellen diese Grössen eine ganz neue Art analytischer Funktionen einer Variablen von der höchsten Wichtigkeit vor. Besonders in der Algebra, in der Theorie der Gleichungen und in der Arithmetik, in der Theorie der quadratischen Formen mit 2 Veränderlichen hat die Betrachtung dieser Funktionen ganz neue Gesichtspunkte hingestellt, und fruchtbare Wege, auf welchen die merkwürdigsten Resultate erlangt wor-

den sind, geöffnet. Die Grenzen dieses Abrisses gestatten nicht, in ein Feld, welches schon mit so schönen Entdeckungen angefüllt ist, zu treten, aber was wir hier in Bezug auf die Funktionen θ, H u. s. w. sagen werden, wird hinreichende Vorbereitung gewähren, um die besonderen Abhandlungen zu lesen, welche diesem Gegenstande gewidmet sind. In der That muss man diese Funktionen zugleich in Bezug auf x und ω untersuchen, um das, was k und k' angeht, also Grössen, die allein von ω abhängig sind, zu finden. Auf dem jetzigen Standpunkte der analytischen Kenntnisse scheint es nämlich nicht möglich zu sein, zu allen ihren Eigenschaften zu gelangen, indem man nur von ihrer Definition als Quotienten der oben gegebenen Reihen ausgeht.*) — Bis zu einem gewissen Grade wird man diese Schwierigkeit begreifen, wenn man bemerkt, dass k und k' nur in so weit Funktionen von ω sind, als man diese Variable als imaginär und von der Form

$$\omega = \alpha + i\beta$$

annimmt, wo β wesentlich verschieden von Null und positiv ist. Es sind dies in Wahrheit Theile von Funktionen, welche sich vielen und grade den am häufigsten angewandten Methoden entziehen. So giebt es für k und k' keine Entwickelung nach Potenzen von ω, und setzt man $\omega = \omega_0 + h$ um die Taylor'sche Reihe anwenden zu können, so bieten sich ganz besondere Umstände dar — die Grössen k und k' können durch Auflösung einer numerischen Gleichung für unendlich viel Werthe von ω bestimmt werden, wenn man hat:

$$\omega_0 = \frac{A + \sqrt{-B}}{C},$$

wo A B C ganze Zahlen sind, und B wesentlich positiv. Aber wenn die Anwendung der Anfangswerthe, für $\omega = \omega_0 + h$ als erstes Glied

*) Poisson und Cauchy sind auf zwei verschiedenen Wegen zu der folgenden Gleichung gekommen:

$$\sqrt{-i\omega}\ (1 + 2e^{i\pi\omega} + 2e^{4i\pi\omega} + 2e^{9i\pi\omega} + \ldots)$$
$$= (1 + 2e^{-\frac{i\pi}{\omega}} + 2e^{-\frac{4i\pi}{\omega}} + 2e^{-\frac{9i\pi}{\omega}} + \ldots)$$

welche zu Grundeigenschaften der Moduln, als Funktionen von ω betrachtet, führt. Aber man kann hieraus nur die Transformation erster Ordnung finden, und bis jetzt hat sich kein anderer Weg, zu den „Modulargleichungen" zu gelangen, gezeigt, als der, welchen die Gründer der Theorie der elliptischen Funktionen betreten haben.

der Reihen eine gewöhnliche Irrationalzahl giebt, so sind die folgenden Glieder nothwendig Transcendenten. So hat man z. B. für $\omega_0 = i$, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und setzt man $\omega = i + h$, so kommt in den Coefficienten der Entwickelung von k und k' nach wachsenden Potenzen von h das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ vor. Man sieht hieraus, wie sehr sich diese Reihen von denjenigen unterscheiden, welche die gewöhnlichen Transcendenten definiren, und wo die Coefficienten immer commensurabel sind. Aber da wir diesen Gegenstand nicht weiter verfolgen können, kommen wir auf unser Thema zurück, und wollen die Benennungen: Modul und sein Complement, welche wir k und k' gegeben haben, rechtfertigen, indem wir die Gleichung

$$k^2 + k'^2 = 1$$

beweisen. — Wir haben folgende Beziehungen gefunden:

$$k\,\theta^2(x) = H^2(x) + k'\,H_1^2(x),$$

$$\theta^2(x) = k\,H^2(x) + k'\,\theta_1^2(x).$$

Setzen wir in der zweiten $x = K$, nachdem beide Glieder durch $\theta^2(x)$ dividirt sind, und bemerken, dass wegen

$$\theta_1(x + K) - \theta(x)$$

sich ergiebt:

$$\theta_1(K) = -\theta(0),$$

so hat man grade die Gleichung, welche zu beweisen war. — Hieraus folgt eine Beziehung zwischen den unendlichen Reihen:

$$\begin{aligned}&(2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots)^4\\ &+ (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots)^4\\ &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^4,\end{aligned}$$

die man auf's Leichteste direct finden kann, und zwar mit Hülfe bekannter arithmetischer Sätze über die Zerlegung der ganzen Zahlen in vier Quadrate. Aber, ohne auf diese Untersuchungen einzugehen, wollen wir dasjenige ergänzen, was sich auf die Definition von k und k' bezieht, deren Quadratwurzeln wir als eindeutige und vollständig bestimmte Funktionen von ω erhalten haben. Jakobi hat gezeigt, dass die Biquadratwurzeln dieselbe Eigenschaft haben, indem er folgende merkwürdige Formeln gegeben hat;

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + \ldots}{1 + q - q^2 - q^5 + \ldots} \qquad 1)$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \ldots}{1 + q + q^3 + q^6 + \ldots} \qquad 2)$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 - q - q^3 + q^6 + \ldots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \ldots} \qquad 3)$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 + q + q^3 + q^6 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots} \qquad 4)$$

Die Gesetze dieser Reihen sind durch folgende Formeln gegeben, wo das Zeichen $\sum$ sich auf alle Werthe des Index n von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnt:

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^n q^{6n^2+2n}}{\sum (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} q^{\frac{3n^2+n}{2}}} \qquad 1)$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{4n^2+2n}}{\sum q^{2n^2+n}} \qquad 2)$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum (-1)^n q^{2n^2}} \qquad 3)$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{2n^2+n}}{\sum q^{n^2}}. \qquad 4)$$

Für das Complement des Moduls aber hat man:

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \ldots}{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - \ldots} \qquad 1)$$

$$= \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} + \ldots}{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \ldots} \qquad 2)$$

$$= \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \ldots} \qquad 3)$$

$$= \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots} \qquad 4)$$

oder wenn man die allgemeinen Glieder nimmt:

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{\sum (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}}{\sum (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} q^{\frac{3n^2+n}{2}}} \qquad 1)$$

$$= \frac{\sum (-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}} \qquad 2)$$

$$= \frac{\sum (-1)^n q^{2n^2}}{\sum (-1)^n q^{n^2}} \qquad 3)$$

$$= \frac{\sum (-1)^n q^{2n^2}}{\sum q^{n^2}} \qquad 4)$$

Die Grösse $\sqrt[4]{k k'}$, welche ebenfalls eine wichtige Rolle spielt, wird durch folgende Entwickelung, die den Vorigen ähnlich ist, gegeben:

$$\sqrt[4]{kk'} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{n^2}}.$$

II. Definition von sin am (x), cos am (x), Δ am (x) ... Differenzialgleichungen.

Wir setzen:

$$u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

$$v = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)},$$

$$w = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Die oben erhaltenen algebraischen Beziehungen, welche in Bezug auf die vier Funktionen homogen sind, geben:

$$u^2 + v^2 = 1,$$

$$k^2 u^2 + w^2 = 1.$$

Die erste führt darauf, u durch einen Sinus, v durch einen Cosinus auszudrücken. So hat es Jakobi gethan, und indem wir die Bezeichnungen dieses berühmten Mathematikers annehmen, setzen wir:

$$u = \sin \operatorname{am}(x),$$

$$v = \cos \operatorname{am}(x),$$

$$w = \Delta \operatorname{am}(x).$$

Der Sinus, der Cosinus und die Funktion Δ der Amplitude von der Variable x sind also die drei doppelt periodischen Hauptfunktionen. Dies führt uns auf den in gewisser Beziehung wesentlichsten Punkt der Theorie, dessen Zweck es ist, sie durch drei Differenzialgleichungen auszudrücken. — Zu dem Ende betrachten wir die Ableitung von u, nämlich:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H'(x)\,\Theta(x) - H(x)\,\Theta'(x)}{\Theta^2(x)} = \frac{\Phi(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Diese Ableitung hat wie die Funktion selbst die Periode 2iK′ und ändert nur das Zeichen, wenn man x in x + 2K verwandelt. Da der Zähler den Werth hat:

$$\Phi(x) = \Theta^2(x)\frac{du}{dx},$$

so erhält man unmittelbar aus den Beziehungen

$$\Theta^2(x + 2K) = \Theta^2(x)$$

$$\Theta^2(x + 2iK') = \Theta^2(x)\, e^{-2\frac{i\pi}{K}(x + iK')},$$

welche der Nenner erfüllt, die folgende:

$$\Phi(x + 2K) = -\Phi(x)$$

$$\Phi(x + 2iK') = \Phi(x)\, e^{-2\frac{i\pi}{K}(x + iK')}.$$

Aber nach dem oben Gesagten (Seite 37 und 38) ist

$$\Phi(x) = a_1 \Phi_1(x) + a_3 \Phi_3(x) = m\,\Theta(x)\,H(x) + m_1\,\Theta_1(x)\,H_1(x),$$

wo m und m_1 Constanten bezeichnen. Bemerkt man daher, dass u mit x sein Zeichen ändert, und dass folglich $\frac{du}{dx}$ eine grade Funktion ist, so sieht man, dass der ungrade Theil $m\,\Theta(x)\,H(x)$ verschwinden muss, also $m = 0$, und man hat einfach:

$$\Phi(x) = m_1\,\Theta_1(x)\,H_1(x),$$

dividirt man durch $\Theta^2(x)$ und setzt:

$$\frac{m_1 \sqrt{k}}{k'} = \mu,$$

so kommt:

$$\frac{du}{dx} = \mu v w = \mu \sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}.$$

Da die Funktion u mit x verschwindet, so stellt die Constante μ die Grenze des Verhältnisses $\frac{\sin \operatorname{am}(x)}{x}$ für $x = 0$ dar, eine Grenze, die im Allgemeinen von den Grössen K und K' abhängt. Wir haben indessen schon früher bemerkt, dass der Ausdruck für die Funktionen $\Theta(x)$, $H(x)$ sich nicht ändert, wenn man x, K, K' durch $\frac{x}{\mu}, \frac{K}{\mu}, \frac{K'}{\mu}$ ersetzt, und dass man diesen Umstand benutzen kann, um auf eine bestimmte Art die Perioden zu spezialisiren. Wir werden sonach eine Beziehung einführen, deren Zweck es ist, die Grenze $\frac{\sin \operatorname{am}(x)}{x}$ gleich Eins zu machen, um in diesem wesentlichen Punkt den Sinus der Amplitude mit dem trigonometrischen Sinus in Uebereinstimmung zu bringen. Man hat:

$$\frac{\sin \operatorname{am}(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\,\frac{1}{x}\sin\frac{\pi x}{2K}\left(1-2q^2\cos\frac{\pi x}{K}+q^4\right)\left(1-2q^4\cos\frac{\pi x}{K}+q^8\right)\dots}{\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\dots}.$$

Setzen wir für $x = 0$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\pi}{K}\,\frac{\sqrt[4]{q}\,(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\dots}$$

oder:

$$\frac{\sqrt{k}\,K}{\pi} = \sqrt[4]{q}\left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}\right]^2.$$

Nimmt man also an, dass die Grössen K und K' diese Bedingung erfüllen, so ergiebt sich

$$\frac{du}{dx} = vw.$$

Dies ist die erste derjenigen Differenzialbeziehungen, welche wir auf-

stellen wollen. Die andern ergeben sich daraus mit Hülfe der Gleichungen:

$$u^2 + v^2 = 1,$$

$$k^2 u^2 + w^2 = 1,$$

und sind

$$\frac{dv}{dx} = -uw,$$

$$\frac{dw}{dx} = -k^2 uv.$$

Allgemeiner hat man:

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = (a_0 + a_1 u^2 + a_2 u^4 + \dots + a_n u^{2n})\, vw,$$

$$\frac{d^{2n}u}{dx^{2n}} = (A_0 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \dots + A_n u^{2n})\, u.$$

Die Coefficienten sind ganze Funktionen von k^2. Hieraus leitet man eine Entwickelung ab, welche zwischen den Grenzen -1 und $+1$ der Variablen stattfindet, und wo zu setzen ist:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

$$u = x - 2k\alpha \frac{x^3}{1.2.3} + 4k^2(\alpha^2 + 3)\frac{x^5}{1.2.3.4.5}$$
$$- 8k^3(\alpha^3 + 33\alpha)\frac{x^7}{1.2\dots7} + 16k^4(\alpha^4 + 306x^2 + 189)\frac{x^9}{1.2\dots9}$$
$$- 32k^5(\alpha^5 + 2746\alpha^3 + 8289\alpha)\frac{x^{11}}{1.2\dots11} + \dots$$

Ebenso ergiebt sich:

$$v = 1 - \frac{x^2}{1.2} + (1 + 4k^2)\frac{x^4}{1.2.3.4} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{x^6}{1.2\dots6}$$
$$+ (1 + 408k^2 + 912k^4 + 64k^6)\frac{x^8}{1.2\dots8} - \dots,$$

$$w = 1 - k^2\frac{x^2}{1.2} + k^2(4 + k^2)\frac{x^4}{1.2.3.4} - k^2(16 + 44k^2 + k^4)\frac{x^6}{1.2\dots6}$$
$$+ k^2(64 + 912k^2 + 408k^4 + k^6)\frac{x^8}{1.2\dots8} - \dots.$$

Gudermann hat die Bemerkung gemacht, dass man bis auf Grössen fünfter Ordnung setzen kann:

$$u = \frac{\sin (x \sqrt{1+k^2})}{\sqrt{1+k^2}}$$

und

$$v = \cos x, \quad w = \cos kx,$$

indem man nur x^4 vernachlässigt, was man leicht durch Entwickelung einsehen kann. — Man hat nun eine neue und vollständige Definition der drei doppelt periodischen Funktionen, indem man mit den Differenzialgleichungen die Anfangswerthe $u = 0$, $v = 1$, $w = 1$ für $x = 0$ verbindet. Im Besondern ist die Funktion sin am (x) bestimmt durch die Gleichung:

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

und dies Integral oder vielmehr das allgemeinere

$$\int \frac{F(u)\, du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

wo F (u) eine rationale Funktion ist, hat durch seine Untersuchung den Weg geöffnet, auf dem man zu den elliptischen Funktionen gelangt ist. Hieraus ersieht man den Ursprung des Ausdrucks: „umgekehrte Funktionen", dessen wir uns öfters bedient haben, da u die umgekehrte Funktion des Integrals ist, welches zum Werth x hat, und man kann sich denken, welche lange Kette von Gedanken und welche Anstrengungen dazu gehörten, um von hier aus zur Kenntniss der doppelt periodischen Funktionen und zu den Reihen, von denen wir ausgegangen sind, zu gelangen. Aber diese lange Arbeit ist für die Wissenschaft fruchtbar gewesen. Denn in Folge dieser Untersuchungen haben wir erst mehrere durchaus fundamentale analytische Kenntnisse erlangt, besonders dasjenige, was wir über die Art der Existenz der Integralfunktionen wissen. Nachdem man z. B. gefunden hatte, dass sin am (x) sich nicht ändert, wenn man x durch $x + 4mK + 2m'iK'$ ersetzt, wo m und m' ganze Zahlen sind, war es nöthig, in dem Integral:

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

selbst den Grund derjenigen Unbestimmtheit zu suchen, welche der

umgekehrten Funktion die Periodicität verleiht. Cauchy hat in seiner Abhandlung über die zwischen imaginären Grenzen genommenen Integrale, die wesentlichen Grundzüge dieser so wichtigen Untersuchung gegeben. Sie ist vollständig durch Puiseux in einer trefflichen Arbeit, betitelt: Untersuchungen über die algebraischen Funktionen, (Liouville'sches Journal, Jahrgang 1850) ausgeführt worden, auf welche wir den Leser verweisen. Noch ein anderer Erfolg besteht in dem vollständigen und tieferen Sinne, welchen man jetzt in der Analysis mit dem Ausdrucke: Funktion verbindet, indem man unter den verschiedenen Arten der Abhängigkeit zweier Grössen wesentliche Unterschiede erkennt und charakterisirt. Die ganze Wichtigkeit dieser Unterscheidungen haben eben diejenigen Untersuchungen gezeigt, zu denen die Theorie der elliptischen Funktionen Anlass gegeben hat. So sind die Untersuchungen entstanden, deren Zweck es ist, bloss aus der Definition einer Funktion, die etwa durch eine Differenzialgleichung gegeben ist, zu erkennen, ob sie eindeutig oder nicht ist, und im ersteren Falle, ob sie ganz oder gebrochen ist. Die durch ihre grosse Allgemeinheit schönsten Resultate, die auf diesem Wege gefunden sind, verdanken wir Weierstrass*) und Riemann**).

III. Von den Grössen K und K′.

Indem wir die Perioden derart spezialisirten, dass für unendlich kleines x die Grenze des Verhältnisses $\frac{\sin \operatorname{am}(x)}{x}$ gleich der Einheit wurde, gelangten wir zu dem Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{k}\,K}{\pi} = \sqrt[4]{q}\left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}\right]^2,$$

welcher zu einer wichtigen Folgerung führt. Bemerken wir zunächst,

*) Theorie der Abel'schen Funktionen. Crelle'sches Journal 1856. Man sehe auch verschiedene Noten von Cauchy, die um dieselbe Zeit in den Comptes rendus veröffentlicht sind, und eine Abhandlung von Briot und Bonquet über die Integration der Differenzialgleichungen erster Ordnung.

**) Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Funktionen unbeschränkt veränderlicher Grössen u. s. w. Crelle'sches Journal 1857.

dass, wenn man $x = K$, und mithin $\sin am\,(K) = 1$*) in den Ausdruck von $\sin am\,(x)$ durch ein unendliches Produkt setzt, man erhält:

$$\sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\left[\frac{(1+q^2)\,(1+q^4)\,(1+q^6)\ldots}{(1+q)\,(1+q^3)\,(1+q^5)\ldots}\right]^2.$$

Dividirt man beide Gleichungen Glied für Glied, und zieht die Quadratwurzel aus, so kommt:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \left[\frac{(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\ldots}{(1-q)\,(1-q^3)\,(1-q^5)\ldots}\right]\left[\frac{(1+q)\,(1+q^3)\,(1+q^5)\ldots}{(1+q^2)\,(1+q^4)\,(1+q^6)\ldots}\right],$$

ein Ausdruck, der auf bemerkenswerthe Art vereinfacht werden kann. Wenden wir zu dem Ende die Euler'sche Gleichung an:

$$(1+q)\,(1+q^2)\,(1+q^3)\ldots = \frac{(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\ldots}{(1-q)\,(1-q^2)\,(1-q^3)\ldots}$$
$$= \frac{1}{(1-q)\,(1-q^3)\,(1-q^5)\ldots},$$

so hat man:

$$\frac{(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\ldots}{(1-q)\,(1-q^3)\,(1-q^5)\ldots} = (1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\ldots \times (1+q)\,(1+q^2)\,(1+q^3)\ldots,$$

und da man hat:

$$(1+q)\,(1+q^2)\,(1+q^3)\ldots = (1+q)\,(1+q^3)\,(1+q^5)\ldots \times (1+q^2)\,(1+q^4)\,(1+q^6)\ldots,$$

so sieht man, dass in dem Werthe von $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ alle Nenner verschwinden, er nimmt die Form an:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = [(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\ldots]\,[(1+q)\,(1+q^3)\,(1+q^5)\ldots]^2.$$

Setzt man also in der oben bewiesenen Formel:

$$\begin{aligned}\theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) &= 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots\\ &= (1+2q\cos 2x+q^2)\,(1+2q^3\cos 2x+q^6)\\ &\times (1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots \times (1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\ldots\end{aligned}$$

---

*) Man findet $\sin am\,(K) = 1$ durch die Formel $\sin am\,(x) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H\,(x)}{\Theta\,(x)}$, wenn man sich der Definition von $\sqrt{k} = \frac{H\,(x)}{\Theta\,(x)}$ Seite 39 erinnert.

$x = 0$, so ergiebt sich:

$$\theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots$$
$$[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^2,$$

und hieraus folgt ein Resultat, das in der Theorie der elliptischen Funktionen von hoher Wichtigkeit ist:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\theta(K)} = \frac{H_1(0)}{\theta_1(0)}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\theta(0)}{\theta_1(0)}$$

leitet man hieraus die beiden andern ab:

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = H_1(0) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots,$$

$$\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = \theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots.$$

Nur die Grösse K giebt Beziehungen von dieser Form, die Grösse K', die in andrer Weise in dem Ausdruck $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ enthalten ist, scheint ähnlicher Reihenentwickelung nicht fähig zu sein. Aber beide drückt man in ähnlicher Weise mit Hülfe der Moduln k und k' durch bestimmte Integrale aus:

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}},$$

wie wir beweisen werden.

Schon oben zeigten wir, dass $\sin am(K) = 1$ ist; bemerken wir jetzt, dass, wenn man in den Beziehungen

$$\theta(x + iK') = i\,H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}$$

$$H(x + iK') = i\,\theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}$$

$x = K$ setzt, und Glied für Glied dividirt, sich ergiebt:

$$\frac{H(K+iK')}{\theta(K+iK')} = \frac{\theta(K)}{H(K)} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Folglich hat sin am $(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}$ für $x = K + iK'$ zum Werthe $\frac{1}{k}$.
Da nun

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

so schliesst man, dass:

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

und folglich, indem man Glied für Glied subtrahirt:

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Setzt man aber

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2v^2}},$$

so verwandelt sich das letzte Integral in:

$$i \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'v^2)}},$$

was das angezeigte Resultat giebt.

Aber was wir eben gesagt haben, lässt doch eine empfindliche Lücke. In Wahrheit sind wir auf einen der Punkte in der Theorie der elliptischen Funktionen gerathen, welche neue Untersuchungen erfordern, um in wünschenswerth erschöpfender Weise behandelt zu werden. Indem wir von der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$$

zur Beziehung:

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

übergingen, haben wir das Gesetz, wonach die Werthe der Variablen

u im Integrale auf einander folgen, durchaus willkürlich gelassen, so dass die vorstehenden Beziehungen

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

nur dann einen vollständig bestimmten Sinn haben, wenn man den Weg zeigt*), welchen die Grösse $u = \sin \mathrm{am}\,(x)$ zurücklegt, während x von 0 bis K und dann von K bis $K + iK'$ fortschreitet. Und da das Argument x zwischen diesen Grenzen nach unendlich vielen Gesetzen sich ändern kann, muss man ferner wissen, wie die entsprechenden Wege, die sich daraus ergeben, alle in Betracht der Integration in Bezug auf u zu demselben Resultat führen. Nur in dem Falle, wo man K und K', also auch x reell annimmt und man die besonderen Gesetze stellt:

$$x = 2\frac{K}{\pi}t,$$

$$x = K + \frac{2iK'}{\pi}\tau,$$

wo t und τ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ in continuirlicher Weise wachsen, können wir die hier gestellte Frage beantworten.

Dass zunächst $\sin \mathrm{am}\left(\frac{2Kt}{\pi}\right)$ reell ist, sieht man durch die Entwickelung:

$$\sin \mathrm{am}\left(\frac{2Kt}{\pi}\right) = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin t - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3t + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5t - \ldots}{1 - 2q\cos 2t + 2q^4\cos 4t - 2q^9\cos 6t + \ldots}.$$

Im Uebrigen ist die Ableitung:

$$\frac{du}{dx} = \frac{k'}{\sqrt{k}}\,\frac{H_1(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta^2(x)},$$

---

*) Wir setzen voraus, dass die von Cauchy herrührenden Grundlagen der geometrischen Darstellung des Imaginären, und der längs einer Curve genommenen Integrale dem Leser bekannt sind. (Dieser Gegenstand ist in dem Anhange behandelt. D. Ueb.)

deren Anfangswerth die Einheit ist, in den Grenzen 0 und K immer positiv. In der That kann sie nur Null werden, wenn

$$H_1(x) = 0,$$

$$\Theta_1(x) = 0,$$

d. h. (siehe Seite 19)

$$x = (2m + 1) K + 2m' i K',$$

$$x = (2m + 1) K + (2m' + 1) i K',$$

und keine dieser Wurzeln ist in dem betrachteten Raume vorhanden, da der Werth $x = K$ grade die obere Grenze dieses Raumes ist. Hieraus schliessen wir, dass wenn t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, u von 0 bis 1 zunimmt, und dass in dem Ausdrucke

$$K = \int_0^k \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

das Integral im gewöhnlichen Sinne genommen ist.

Sei zweitens

$$x = K + \frac{2iK'\tau}{\pi}.$$

Da man hat:

$$H\left(K + \frac{2iK'\tau}{\pi}\right) = H_1\left(\frac{2iK'\tau}{\pi}\right),$$

$$\Theta\left(K + \frac{2iK'\tau}{\pi}\right) = \Theta_1\left(\frac{2iK'\tau}{\pi}\right),$$

kann man setzen:

$$\sin \operatorname{am}\left(K + \frac{2iK'\tau}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H_1\left(\frac{2iK'\tau}{\pi}\right)}{\Theta_1\left(\frac{2iK'\tau}{\pi}\right)},$$

und indem man die Funktionen einführt:

$$\eta_1(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}} H_1(x),$$

$$\vartheta_1(x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}} \Theta_1(x),$$

$$\sin\operatorname{am}\left(K+\frac{2iK'\tau}{\pi}\right)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\eta_1\left(\frac{2iK'\tau}{\pi}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2iK'\tau}{\pi}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1-2q_0\cos 2\tau+2q_0^4\cos 4\tau-2q_0^9\cos 6\tau+\ldots}{1+2q_0\cos 2\tau+2q_0^4\cos 4\tau+2q_0^9\cos 6\tau+\ldots},$$

was ebenfalls eine reelle Grösse ist*). Man schliesst also wie oben, dass die Ableitung in Bezug auf τ, die in den beiden Grenzen $\tau=0$, $\tau=\frac{\pi}{2}$ verschwindet, in dem ganzen Zwischenraum nicht Null wird, so dass ebenfalls in dem gewöhnlichen Sinne einer gradlinigen Integration die Gleichung

$$iK'=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

zu verstehen ist, aus der wir gefunden haben:

$$K'=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}.$$

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, bemerken wir noch, um die Schwierigkeit zu zeigen, die, im Falle $K\,K'$ und k imaginär sind, stattfindet, dass die Annahme, auf die man am leichtesten kommt, dass man x z. B. von 0 bis K nach einem solchen Gesetze will variiren lassen, dass u beständig reell sei, nicht zulässig ist. Mit andern Worten, es ist im Allgemeinen unmöglich, dass in dem Ausdrucke

$$K=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

das Integral immer gradlinig sei, wie wir es so eben bestimmt haben.

Sei in der That

$$\mathfrak{K}=aK+biK',$$

$$i\mathfrak{K}'=cK+diK',$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen sind, welche folgende Bedingungen erfüllen:

---

*) Wie man sich erinnert, war $q_0=e^{-\pi\frac{K}{K'}}$ (siehe Seite 35).

$$ad - bc = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv 1 \\ b \equiv 0 \\ c \equiv 0 \\ d \equiv 1 \end{array}\right\} \text{mod. } 2.$$

Setzt man:

$$\mathfrak{Q} = e^{-\pi\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}'}},$$

so ergiebt sich

$$\sin am\left(\frac{2\mathfrak{K}x}{\pi}\right) = \frac{(-1)^{a+c-1}}{\sqrt{k}} \cdot$$

$$\frac{2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}}\sin x - 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x - 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots},$$

was bis auf das Zeichen*) derselbe Ausdruck in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ ist, als

$$\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots}$$

in Bezug auf K und K'. Man schliesst daraus, dass $\mathfrak{K}$ wie K durch das Integral gegeben ist:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Aber wenn b nicht gleich 0 ist, kann der imaginäre Werth

$$\mathfrak{K} = aK + biK'$$

nur aus einem krummlinigen Integral entspringen. — Aber folgendes wichtige Resultat bleibt bestehen, wie auch der Weg der Integration sei. Die Grössen K und K' nämlich erfüllen beide immer die lineäre Differenzial-Gleichung zweiter Ordnung:

---

*) Die entsprechenden Ausdrücke für cos am (x) und Δ am (x) sind:

$$\cos am\left(\frac{2\mathfrak{K}x}{\pi}\right) = (-1)^{\frac{b+c}{2}}\sqrt{\frac{k}{k'}}\,\frac{2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}}\cos x + 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^{25}}\cos 5x + \ldots}{1 - 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x - 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots}$$

$$\Delta am\left(\frac{2\mathfrak{K}x}{\pi}\right) = (-1)^{\frac{b}{2}}\sqrt{k'}\,\frac{1 + 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x + 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x - 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots}$$

hieraus erhält man, $x = 0$ gesetzt, alles was sich auf $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k'}$ bezieht, wenn man dort K und K' mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ vertauscht.

$$(k - k^3)\frac{d^2 z}{d k^2} + (1 - 3 k^2)\frac{d z}{d k} - k z = 0.$$

Das Integral davon mit zwei willkürlichen Constanten C und C′ ist mithin:

$$z = CK + C'K'.$$

Diese Gleichung führt zur Entwickelung von K und K′ unter folgender Form: Es sei

$$\mathfrak{k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k^{2n} + \ldots$$

und $\mathfrak{k}_n$ die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe, dann ist

$$K = \frac{\pi}{2}\mathfrak{k},$$

$$K' = \lg\frac{4}{k} - (\mathfrak{k} - 1) - \frac{2}{3 \,.\, 4}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_1) - \frac{2}{5 \,.\, 6}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_2) - \ldots$$

Auch ergiebt sich daraus folgende merkwürdige Eigenschaft, auf die wir nachher auf einem andern Wege kommen werden:

$$KJ' - JK' = \frac{\pi}{2},$$

wo

$$J = \int_0^1 \frac{k^2 u^2 du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}, \quad J' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 u^2 du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2 u^2)}}.$$

F. Addition der Argumente. Abel'scher Satz.

Euler hat zuerst Formeln gefunden, durch welche man sin am (a+b), cos am (a+b), Δ am (a+b) durch dieselben Funktionen bezogen auf die Argumente a und b ausdrücken kann, und diese wichtige Entdeckung war der Ausgangspunkt und die Grundlage der Arbeiten, welche die Theorie der elliptischen Funktionen geschaffen haben, eben so wie man in der elementaren Trigonometrie auf die analytischen Eigenschaften des Sinus und Cosinus gekommen ist, indem man von den Beziehungen ausging, welche den Sinus und Cosinus der Summe zweier Bogen als Funktion der Sinus und

Cosinus dieser Bogen selbst geben. Dieser ausgezeichnete Analytiker, der in der Geschichte der Wissenschaft, so zu sagen, durch seine Divination berühmt geworden ist, fand unter algebraischer Form das Integral der Gleichung:

$$1)\quad \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \frac{du'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} = 0.$$

Dies Ergebniss aber giebt eben den Sinus der Amplitude von der Summe zweier Argumente, wie wir es eben ausgesprochen haben. Bezeichnet man nämlich die willkürliche Constante mit C, so ist das Integral:

$$2)\quad \frac{u\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)} + u'\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{1-k^2u^2u'^2} = C.$$

Setzt man nun:

$$u = \sin \operatorname{am} a,$$

$$u' = \sin \operatorname{am} a',$$

so nimmt Gleichung 1) die Form an:

$$da + da' = 0,$$

giebt also unmittelbar

$$a + a' = c.$$

Man hat also das Integral derselben Differenzial-Gleichung unter zwei verschiedenen Formen, und um die Beziehung, welche zwischen beiden Constanten stattfindet, aufzustellen, muss man von einem auf das andere übergehen. Zu dem Ende bemerken wir, dass c offenbar der Werth von a, für $a' = 0$ ist. Macht man also auch in Gleichung 2) $a' = 0$ und folglich $u' = 0$, so giebt dieselbe $c = u = \sin \operatorname{am} a$. Die Beziehung zwischen den Constanten ist also

$$C = \sin \operatorname{am} c.$$

Der Werth von C durch u und u' ausgedrückt, bestimmt also vollständig $\sin \operatorname{am} (a + a')$ als algebraische Funktion von $\sin \operatorname{am} a$ und $\sin \operatorname{am} a'$. Auch die Geometrie liefert mehrere höchst interessante Methoden, um zu diesem Resultat zu gelangen. Indem wir sie hier nicht alle anführen können, beschränken wir uns hier darauf, unter seiner so bemerkenswerthen analytischen Form den von Abel entdeckten Satz von der Addition einer beliebigen Anzahl von Argumenten zu geben.

I. Abel'scher Satz.

Die Ausdrücke für sin am x, cos am x, Δ am x durch $\Theta(x)$ $H(x)$ u. s. w. erfüllen folgende Beziehungen, welche die doppelte Periodicität dieser Funktionen geben:

$$\text{I.}\qquad \sin \mathrm{am}\,(x + 2K) = -\sin \mathrm{am}\, x,$$
$$\sin \mathrm{am}\,(x + 2iK') = +\sin \mathrm{am}\, x;$$

$$\text{II.}\qquad \cos \mathrm{am}\,(x + 2K) = -\cos \mathrm{am}\, x,$$
$$\cos \mathrm{am}\,(x + 2iK') = -\cos \mathrm{am}\, x;$$

$$\text{III.}\qquad \Delta\, \mathrm{am}\,(x + 2K) = +\Delta\, \mathrm{am}\, x,$$
$$\Delta\, \mathrm{am}\,(x + 2iK') = -\Delta\, \mathrm{am}\, x.$$

Man bemerkt, dass die drei Funktionen sich im zweiten Gliede bis auf das Vorzeichen wieder einstellen, so dass die verschiedenen Combinationen zu zweien unter diesen Vorzeichen für beide Perioden jeder der Funktionen ein specielles Kennzeichen geben, welches in gewisser Weise alle allgemeineren Funktionen mit einander verbindet, welche aus sin am x, cos am x, Δ am x zusammengesetzt sind und in Bezug auf die Perioden dieselben Beziehungen erfüllen. Wenn man nämlich unter F (x) und $\mathfrak{F}$ (x) zwei ganze Polynomen von x bezüglich vom Grade n und n—1 versteht, und setzt:

$$\varphi_1(x) = \sin \mathrm{am}\, x\, F(\sin^2 \mathrm{am}\, x) + \frac{d \sin \mathrm{am}\, x}{dx} \mathfrak{F}(\sin^2 \mathrm{am}\, x),$$

$$\varphi_2(x) = \cos \mathrm{am}\, x\, F(\cos^2 \mathrm{am}\, x) + \frac{d \cos \mathrm{am}\, x}{dx} \mathfrak{F}(\cos^2 \mathrm{am}\, x),$$

$$\varphi_3(x) = \Delta\, \mathrm{am}\, x\, F(\Delta^2 \mathrm{am}\, x) + \frac{d\, \Delta\, \mathrm{am}\, x}{dx} \mathfrak{F}(\Delta^2 \mathrm{am}\, x),$$

so hat man wie oben:

$$\text{I.}\qquad \varphi_1(x + 2K) = -\varphi_1(x),$$
$$\varphi_1(x + 2iK') = +\varphi_1(x);$$

$$\text{II.}\qquad \varphi_2(x + 2K) = -\varphi_2(x),$$
$$\varphi_2(x + 2iK') = -\varphi_2(x);$$

$$\text{III.}\qquad \varphi_3(x + 2K) = +\varphi_3(x),$$
$$\varphi_3(x + 2iK') = -\varphi_3(x).$$

Diese verschiedenen Ausdrücke sind zu dem Theorem, welches wir geben wollen, nöthig. Mit ihnen ist jedoch noch der folgende zu verbinden, dessen Kennzeichen in der vierten Combination besteht, welche noch unter den Vorzeichen im zweiten Gliede möglich ist.

$$\varphi(x + 2K) = +\varphi(x),$$
$$\varphi(x + 2iK') = +\varphi(x).$$

Seien F(x) und $F_1(x)$ Polynome bezüglich vom nten und n—2ten Grade, dann ist φ (x) von der Form:

$$\varphi(x) = F(z^2) + \frac{dz}{dx} z F_1(z^2),$$

wo z sowohl sin am x, als cos am x oder Δ am x bedeuten kann. Sei aber, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, z = sin am x; um dann den Zähler und Nenner von φ (x) hinstellen zu können, wenden wir den Ausdruck:

$$z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}$$

an, dieser giebt offenbar als Nenner $\Theta^{2n}(x)$, derart dass man setzen kann:

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^{2n}(x)}.$$

Da man nun hat:

$$\Theta^{2n}(x + 2K) = \Theta^{2n}(x),$$
$$\Theta^{2n}(x + 2iK') = \Theta^{2n}(x)\, e^{-2n\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

so giebt die Beziehung:

$$\Phi x = \varphi x\, \Theta^{2n}(x)$$

unmittelbar mit Rücksicht darauf, dass φ (x) die beiden Perioden 2K und 2iK′ besitzt:

1) $$\Phi(x + 2K) = \Phi(x),$$
$$\Phi(x + 2iK') = \Phi(x)\, e^{-2n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}.$$

Diesen Bedingungen kann man aber in allgemeinster Weise genügen, indem man wohlbemerkt nur ganze Funktionen anwendet, wenn man setzt:

$$\Phi(x) = A\, H(x - \alpha_1)\, H(x - \alpha_2) \dots H(x - \alpha_{2n}),$$

wo A ein constanter Faktor ist.

In der That sieht man mit Hülfe der Gleichungen:

$$H(x - \alpha + 2K) = -H(x - \alpha),$$
$$H(x - \alpha + 2iK') = -H(x - \alpha)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x-\alpha+iK')},$$

dass man nur die Bedingung anzunehmen braucht:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n} = 0,$$

so dass die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{2n-1}$ willkürlich bleiben, ebenso wie der constante Faktor A. Es ist aber auch leicht zu sehen, dass die allgemeinste ganze Funktion, welche den Gleichungen 1) genügt, auch nur 2n willkürliche Constanten erhält. — Sei nämlich:

$$\Phi(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m\, e^{m\frac{i\pi x}{K}},$$

oder was dasselbe ist:

$$\Phi(x) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{2n}}\, e^{m\frac{i\pi x}{K}},$$

so giebt die zweite der Beziehungen 1):

$$a_{m+2n} = a_m,$$

es bleiben also in dem Ausdrucke für $\varphi(x)$ nur die 2n Constanten $a_0, a_1 \dots a_{2n-1}$. Somit kann man setzen:

$$\text{I.} \quad \varphi(x) = \frac{A\, H(x - \alpha_1)\, H(x - \alpha_2) \dots H(x - \alpha_{2n})}{\Theta^{2n}(x)}$$

und diese merkwürdige Gleichung wird in derselben Weise stattfinden, wenn man für $\varphi(x)$ die aus

$$F(z^2) + \frac{dz}{dx}\, z\, F_1(z^2)$$

entstandene Funktion nimmt, wenn $z = \cos \operatorname{am} x$ und $z = \Delta \operatorname{am} x$ gesetzt wird.

Eine ganz ähnliche Schlussfolge giebt nun in Bezug auf die drei Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ die folgenden Sätze, wo $A_1\ A_2\ A_3$ Constanten vorstellen:

$$\varphi_1(x) = \frac{A_1 H(x-\alpha_1) H(x-\alpha_2) \ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{A_2 H_1(x-\alpha_1) H_1(x-\alpha_2) \ldots H_1(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{A_3 \Theta_1(x-\alpha_1) \Theta_1(x-\alpha_2) \ldots \Theta_1(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

unter den Grössen α findet die Beziehung statt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 0.$$

In der Folgerung, welche wir hieraus ziehen werden, besteht der Abel'sche Satz im eigentlichen Sinne.

Zu dem Ende gehen wir von den auf $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ bezüglichen Gleichungen aus, wo die Funktion $H(x)$ vorkommt, welche gleichzeitig mit x verschwindet, und so die Wurzeln der Gleichungen $\varphi(x) = 0$, $\varphi_1(x) = 0$ giebt.

Betrachten wir im Besondern die Funktion $\varphi(x)$, bei welcher sich drei verschiedene Fälle darbieten, die den Bedingungen entsprechen:

$$z = \sin \operatorname{am} x,$$

$$z = \cos \operatorname{am} x,$$

$$z = \Delta \operatorname{am} x.$$

Die Polynome F und F_1 enthalten 2n Constanten. Indem man den Coefficienten von z^{2n} gleich der Einheit setzt, kann man die andern Coefficienten durch die Gleichungen ersten Grades bestimmen:

$$\varphi(\alpha_1) = 0,\ \varphi(\alpha_2) = 0 \ldots \varphi(\alpha_{2n-1}) = 0.$$

Dann zeigt uns aber die Beziehung I, dass auch für $x = \alpha_{2n}$ $\varphi(x) = 0$ ist, d. h. nach der Bedingung, welche die Grössen α verbindet, für:

$$x = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}).$$

Aber das Produkt:

$$\left[F(z^2) + \frac{dz}{dx} z\, F_1(z^2)\right]\left[F(z^2) - \frac{dz}{dx} z\, F_1(z^2)\right]$$

giebt in jedem der drei Fälle, die wir zu betrachten haben, ein ganzes Polynom vom vierten Grade, welches nur grade Potenzen von z enthält. Denn man hat

für $z = \sin \operatorname{am} x$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$,

für $z = \cos \operatorname{am} x$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (1 - z^2)(k'^2 + k^2 z^2)$,

für $z = \Delta \operatorname{am} x$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (1 - z^2)(k'^2 - z^2)$.

Diese Polynome lassen sich in Faktoren zerlegen; im ersten Falle erhält man:

$$(z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1)(z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2) \ldots (z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_{2n-1}) \\ \times [z^2 - \sin^2 \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1})],$$

im zweiten:

$$(z^2 - \cos^2 \operatorname{am} \alpha_1)(z^2 - \cos^2 \operatorname{am} \alpha_2) \ldots (z^2 - \cos^2 \operatorname{am} \alpha_{2n-1}) \\ \times [z^2 - \cos^2 \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1})],$$

endlich im dritten:

$$(z^2 - \Delta^2 \operatorname{am} \alpha_1)(z^2 - \Delta^2 \operatorname{am} \alpha_2) \ldots (z^2 - \Delta^2 \operatorname{am} \alpha_{2n-1}) \\ \times [z^2 - \Delta^2 \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1})].$$

Die hier aufgestellten Identitäten geben ein wichtiges Ergebniss, wenn man $z = 0$ setzt. Wenn man nämlich bezüglich in den drei Fällen unter L, M, N das Glied im Polynom $F(z^2)$ versteht, welches z nicht enthält, so hat man die Beziehungen:

$$\sin \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}) = \frac{\pm L}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \ldots \sin \operatorname{am} \alpha_{2n-1}},$$

$$\cos \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}) = \frac{\pm M}{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \ldots \cos \operatorname{am} \alpha_{2n-1}},$$

$$\Delta \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}) = \frac{\pm N}{\Delta \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2 \ldots \Delta \operatorname{am} \alpha_{2n-1}}.$$

Zu ganz ähnlichen Schlüssen giebt die Funktion:

$$\varphi_1(x) = \sin \operatorname{am} x \, F(\sin^2 \operatorname{am} x) + \frac{d \sin \operatorname{am} x}{dx} \mathfrak{F}(\sin^2 \operatorname{am} x)$$

Anlass, wo F und $\mathfrak{F}$ zusammen $2n+1$ willkürliche Constanten enthalten. Setzt man den Coefficienten der höchsten Potenz von $F(z^2)$ gleich Eins und bestimmt die andern durch die Gleichungen

$$\varphi_1(\alpha_1) = 0, \ \varphi_1(\alpha_2) = 0 \ldots \varphi_1(\alpha_{2n}) = 0,$$

so wird

$$\sin^2 \text{am}\, x\, F^2(\sin^2 \text{am}\, x) - \left(\frac{d \sin \text{am}\, x}{dx}\right)^2 \mathfrak{F}^2(\sin^2 \text{am}\, x)$$

$$= (\sin^2 \text{am}\, x - \sin^2 \text{am}\, \alpha_1)(\sin^2 \text{am}\, x - \sin^2 \text{am}\, \alpha_2) \ldots (\sin^2 \text{am}\, x - \sin^2 \text{am}\, \alpha_{2n})$$
$$\times [\sin^2 \text{am}\, x - \sin^2 \text{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n})].$$

Dieser zweite Satz würde den Werth von

$$\sin^2 \text{am}\, (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n})$$

geben, wo eine grade Anzahl von Argumenten vorkommt, aber der erste hat den Vorzug, gleichzeitig zu den Ausdrücken von:

$$\sin \text{am}\, (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}),$$
$$\cos \text{am}\, (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}),$$
$$\Delta\, \text{am}\, (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1})$$

zu führen. Die Bedingung, dass die Anzahl der Argumente ungrade ist, kommt nicht in Betracht, denn man kann ja eins davon gleich Null setzen. Wir haben aber noch eine Folgerung zu ziehen. Wir bemerken nämlich, dass die Gleichungen:

$$\varphi(\alpha_1) = 0, \quad \varphi(\alpha_2) = 0 \ldots \varphi(\alpha_{2n-1}) = 0$$

oder abgekürzt:

$$\varphi(\alpha_i) = 0$$

als Coefficienten von F und F_1 rationale Funktionen folgender Grössen ergeben: im ersten Falle, für $z = \sin \text{am}\, x$ rationale Funktionen von

$$\sin \text{am}\, \alpha_i \quad \text{und} \quad \frac{d \sin \text{am}\, \alpha_i}{d\alpha_i} = \cos \text{am}\, \alpha_i\, \Delta\, \text{am}\, \alpha_i\,,$$

im zweiten für $z = \cos \text{am}\, x$ von

$$\cos \text{am}\, \alpha_i \quad \text{und} \quad \frac{d \cos \text{am}\, \alpha_i}{d\alpha_i} = -\sin \text{am}\, \alpha_i\, \Delta\, \text{am}\, \alpha_i\,,$$

im dritten Falle endlich für $z = \Delta\, \text{am}\, x$ von

$$\Delta\, \text{am}\, \alpha_i \quad \text{und} \quad \frac{d\, \Delta\, \text{am}\, \alpha_i}{d\alpha_i} = -k^2 \sin \text{am}\, \alpha_i \cos \text{am}\, \alpha_i\,.$$

Dies ist die Form derjenigen Grössen, welche wir so eben mit L M N bezeichnet haben, und mithin auch die der Werthe von

$$\sin \text{am}\, (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}),$$
$$\cos \text{am}\, (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}),$$
$$\Delta\, \text{am}\, (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}).$$

Was das doppelte Vorzeichen anbetrifft, so kann man es durch einen speziellen Fall bestimmen.

Wir werden sogleich ein Beispiel geben.

II. Formeln für die Addition zweier Argumente.

Wir werden die vorhergehenden Sätze auf den Fall dreier Argumente α_1 α_2 α_3 anwenden, von denen wir das letzte gleich Null setzen; wir nehmen:

$$\varphi(x) = (z^4 + az^2 + b) + cz\frac{dz}{dx}.$$

Im Falle, wo $z = \sin \operatorname{am} x$, nimmt die Grundgleichung die Form an:

$$(z^4 + az^2 + b)^2 - c^2 z^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = z^2 (z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1)(z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2) \times [z^2 - \sin^2 \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

so dass man also $b = 0$ setzen muss. Lässt man aus beiden Gliedern den Faktor z^2 weg, und setzt dann $z = 0$, so ergiebt sich:

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pm C}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Die Gleichungen $\varphi(\alpha_1) = 0$, $\varphi(\alpha_2) = 0$ geben dann:

$$\sin^3 \operatorname{am} \alpha_1 + a \sin \operatorname{am} \alpha_1 + c \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1 = 0,$$

$$\sin^3 \operatorname{am} \alpha_2 + a \sin \operatorname{am} \alpha_2 + c \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 = 0,$$

also:

$$\frac{C}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2} = \frac{\sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 - \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1}.$$

Für $\alpha_2 = 0$ reducirt sich dieser Ausdruck auf $\sin \operatorname{am} \alpha_1$, man muss also in der Formel das obere Zeichen nehmen. Multiplicirt man noch Zähler und Nenner des Bruches mit

$$\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 + \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1$$

und lässt im Zähler und Nenner den Faktor $\sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2$ weg, so ergiebt sich:

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \Delta \operatorname{am} \alpha_2 + \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}$$

In den andern Fällen, wo $z = \cos \operatorname{am} x$ und $z = \Delta \operatorname{am} x$ ist, hat die Gleichung:

$$z^4 + az^2 + b + cz \frac{dz}{dx} = 0$$

die Wurzel $z = 1$, welche dem dritten Argument, das man gleich Null gesetzt hat, entspricht. Man kann also setzen:

$$z^4 + az^2 + b = (z^2 - 1)(z^2 + m);$$

dies führt für $z = \cos \operatorname{am} x$ zu den Gleichungen:

$$\cos^2 \operatorname{am} \alpha_1 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{\sin \operatorname{am} \alpha_1} = 0,$$

$$\cos^2 \operatorname{am} \alpha_2 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_2 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{\sin \operatorname{am} \alpha_2} = 0,$$

und zu dem Werthe:

$$\cos \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pm m}{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Eben so hat man für $z = \Delta \operatorname{am} x$ die ganz ähnlichen Beziehungen:

$$\Delta^2 \operatorname{am} \alpha_1 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{\sin \operatorname{am} \alpha_1} = 0,$$

$$\Delta^2 \operatorname{am} \alpha_2 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_2 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{\cos \operatorname{am} \alpha_2} = 0,$$

$$\Delta \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_1) = \frac{\pm m}{\Delta \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Eine Rechnung, die ganz analog derjenigen ist, welche sich auf den Sinus bezieht, giebt folgende Formeln:

$$\cos \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 - \sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2},$$

$$\Delta \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\Delta \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2 - k^2 \sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Diese drei Formeln, welche wir aus dem Abel'schen Theorem abgeleitet haben, heissen mit vollem Rechte Grundformeln, denn sie reichen vollständig aus, die Funktionen $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$ zu definiren. Aus den ersten Abhandlungen Abels und später aus den Arbeiten Gudermanns, eines der besten Schriftsteller, welche

über die Theorie der elliptischen Funktionen geschrieben haben, kann man sehen, wie daraus die doppelte Periodicität folgt; ferner die Ausdrücke für sin am (nx), cos am (nx), Δ am (nx), wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Hieraus leitet man, indem man $\frac{x}{n}$ statt x setzt, und zur Grenze für $n = \infty$ übergeht, die analytischen Ausdrücke in der Form von Quotienten der Reihen θ und H ab. Wir setzen noch folgende Formeln hin, die sich unmittelbar aus den obigen ergeben:

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\sin \operatorname{am}\alpha_1 \cos \operatorname{am}\alpha_2 \Delta \operatorname{am}\alpha_2 - \sin \operatorname{am}\alpha_2 \cos \operatorname{am}\alpha_1 \Delta \operatorname{am}\alpha_1}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_2},$$

$$\cos \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\cos \operatorname{am}\alpha_1 \cos \operatorname{am}\alpha_2 + \sin \operatorname{am}\alpha_1 \sin \operatorname{am}\alpha_2 \Delta \operatorname{am}\alpha_1 \Delta \operatorname{am}\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_2},$$

$$\Delta \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\Delta \operatorname{am}\alpha_1 \Delta \operatorname{am}\alpha_2 + k^2 \sin \operatorname{am}\alpha_1 \sin \operatorname{am}\alpha_2 \cos \operatorname{am}\alpha_1 \cos \operatorname{am}\alpha_2}{1 - k \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_2}.$$

Durch Addition und Subtraktion ergiebt sich hieraus:

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2 \sin \operatorname{am}\alpha_1 \cos \operatorname{am}\alpha_2 \Delta \operatorname{am}\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_2},$$

$$\cos \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2 \cos \operatorname{am}\alpha_1 \cos \operatorname{am}\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_2},$$

$$\Delta \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) + \Delta \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2 \Delta \operatorname{am}\alpha_1 \Delta \operatorname{am}\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_2};$$

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2 \sin \operatorname{am}\alpha_2 \cos \operatorname{am}\alpha_1 \Delta \operatorname{am}\alpha_1}{1 - k \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_2},$$

$$\cos \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2 \sin \operatorname{am}\alpha_1 \sin \operatorname{am}\alpha_2 \Delta \operatorname{am}\alpha_1 \Delta \operatorname{am}\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin \operatorname{am}\alpha_2},$$

$$\Delta \operatorname{am}(\alpha_1 - \alpha_2) - \Delta \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2 k^2 \sin \operatorname{am}\alpha_1 \sin \operatorname{am}\alpha_2 \cos \operatorname{am}\alpha_1 \cos \operatorname{am}\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_1 \sin^2 \operatorname{am}\alpha_2}.$$

Indem man in den drei letzten Gleichungen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = x, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = a$$

setzt, erhält man alle Werthe von x, welche die Gleichungen erfüllen:

$$\sin \operatorname{am} x = \sin \operatorname{am} a,$$

$$\cos \operatorname{am} x = \cos \operatorname{am} a,$$

$$\Delta \operatorname{am} x = \Delta \operatorname{am} a.$$

Im ersten Falle erkennt man leicht, dass alle Auflösungen der entsprechenden Gleichung mit denen der folgenden Gleichungen übereinstimmen:

$$\sin \operatorname{am} \frac{x-a}{2} = 0 \text{ oder } \infty,$$

$$\cos \operatorname{am} \frac{x+a}{2} = 0,$$

$$\Delta \operatorname{am} \frac{x+a}{2} = 0.$$

Unmittelbar aus den Formeln, welche Seite 19 für die Wurzeln der Gleichungen

$$\Theta(x) = 0, \quad H(x) = 0, \quad \Theta_1(x) = 0, \quad H_1(x) = 0$$

gegeben sind, sieht man, dass sich ergiebt:

$$x = a + 4mK + 2m'iK',$$

$$x = a + (4m + 2)K + 2m'iK'.$$

Ebenso für:

$$\cos \operatorname{am} x = \cos \operatorname{am} a$$

erhält man:

$$x = \pm a + 4mK + 4m'iK',$$

$$x = \pm a + (4m + 2)K + 4m'iK',$$

oder einfacher:

$$x = \pm a + 2m(K + iK') + 4m'iK'$$

und für

$$\Delta \operatorname{am} x = \Delta \operatorname{am} a$$

$$x = \pm a + 2mK + 4m'iK'.$$

In diesen Formeln bedeuten m und m' beliebige ganze positive oder negative Zahlen. Die Formeln für die Addition zweier Argumente

geben noch zu vielen andern Bemerkungen Anlass. Beschränken wir uns hier auf diejenigen Ergebnisse, welche sich auf die Verdoppelung und auf diejenigen Werthe beziehen, welche die drei Funktionen annehmen, wenn man das Argument gleich einer halben Periode setzt. Die ersteren ergeben sich unmittelbar aus den Grundformeln:

$$\sin \mathrm{am}\, 2\alpha = \frac{2 \sin \mathrm{am}\, \alpha \cos \mathrm{am}\, \alpha\, \Delta \mathrm{am}\, \alpha}{1 - k^2 \sin^4 \mathrm{am}\, \alpha},$$

$$\cos \mathrm{am}\, 2\alpha = \frac{1 - 2 \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha + k^2 \sin^4 \mathrm{am}\, \alpha}{1 - k^2 \sin^4 \mathrm{am}\, \alpha},$$

$$\Delta \mathrm{am}\, 2\alpha = \frac{1 - 2k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha + k^2 \sin^4 \mathrm{am}\, \alpha}{1 - k^2 \sin^4 \mathrm{am}\, \alpha}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Werthe, die von Gudermann herrühren:

$$\sin \mathrm{am}\, \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}},$$

$$\cos \mathrm{am}\, \frac{K}{2} = \frac{k'}{\sqrt{1+k'}},$$

$$\Delta \mathrm{am}\, \frac{K}{2} = \sqrt{k'};$$

$$\sin \mathrm{am}\, \frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}},$$

$$\cos \mathrm{am}\, \frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{1+k}},$$

$$\Delta \mathrm{am}\, \frac{iK'}{2} = \sqrt{1+k};$$

$$\sin \mathrm{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}},$$

$$\cos \mathrm{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i \sqrt{\frac{k'}{1-k'}},$$

$$\Delta \mathrm{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i \sqrt{k'};$$

$$\sin \operatorname{am}\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\cos \operatorname{am}\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \mp i \sqrt{\frac{1-k}{k}},$$

$$\varDelta \operatorname{am}\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{1-k};$$

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = \sqrt{1 \pm \frac{ik'}{k}},$$

$$\cos \operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = (1 \mp i) \sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

$$\varDelta \operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = k' \sqrt{1 \mp \frac{ik'}{k}}.$$

III. Von der Multiplication der Argumente.

Dieser wichtige Theil der Theorie der elliptischen Funktionen ist so enge mit der Theorie der Transformation verknüpft, mit der wir uns hier nicht beschäftigen werden, dass wir uns auf die Mittheilung einer kleinen Anzahl von Ergebnissen beschränken müssen.

Sei zunächst n eine grade Zahl, und setzen wir:

$$m = \frac{n^2}{2},$$

so hat man:

$$\sin \operatorname{am}(nx) \\ = n \cos \operatorname{am} x \, \varDelta \operatorname{am} x \frac{\sin \operatorname{am} x + A' \sin^3 \operatorname{am} x + \ldots + G' \sin^{2m-3} \operatorname{am} x}{1 + A \sin^2 \operatorname{am} x + \ldots + H \sin^{2m} \operatorname{am} x},$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cos \operatorname{am}(nx) = \frac{1 + A'_1 \cos^2 \operatorname{am} x + \ldots + H'_1 \cos^{2m} \operatorname{am} x}{1 + A_1 \cos^2 \operatorname{am} x + \ldots + H_1 \cos^{2m} \operatorname{am} x},$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \varDelta \operatorname{am}(nx) = \frac{1 + A'_2 \varDelta^2 \operatorname{am} x + \ldots + H'_2 \varDelta^{2m} \operatorname{am} x}{1 + A_2 \varDelta^2 \operatorname{am} x + \ldots + H_2 \varDelta^{3m} \operatorname{am} x}.$$

Sei ferner n ungrade und setzen wir $m = \frac{n^2-1}{2}$ so hat man:

$$\sin \mathrm{am}\,(nx) = n \frac{\sin \mathrm{am}\,x + a' \sin^3 \mathrm{am}\,x + \ldots + h' \sin^{2m+1} \mathrm{am}\,x}{1 + a \sin^2 \mathrm{am}\,x + \ldots + h \sin^{2m} \mathrm{am}\,x},$$

$$\cos \mathrm{am}\,(nx) = n \frac{\cos \mathrm{am}\,x + a'_1 \cos^3 \mathrm{am}\,x + \ldots + h'_1 \cos^{2m+1} \mathrm{am}\,x}{1 + a_1 \cos^2 \mathrm{am}\,x + \ldots + h_1 \cos^{2m} \mathrm{am}\,x},$$

$$\varDelta\, \mathrm{am}\,(nx) = n \frac{\varDelta \mathrm{am}\,x + a'_2 \varDelta^3 \mathrm{am}\,x + \ldots + h'_2 \varDelta^{2m+1} \mathrm{am}\,x}{1 + a_2 \varDelta^2 \mathrm{am}\,x + \ldots + h_2 \varDelta^{2m} \mathrm{am}\,x}.$$

Alle Coefficienten in diesen verschiedenen Formeln sind rationale und ganze Funktionen von k^2. Zu ihrer Bestimmung hat Jakobi für den Fall, wo n ungrade ist, folgenden Satz gegeben. — Sei $\sin \mathrm{am}\,(x) = \frac{u}{\sqrt{k}}$, $\sin \mathrm{am}\,(nx) = \frac{U}{\sqrt{k}}$, ferner $U = \frac{P}{Q}$, P und Q ganze Polynome in Bezug auf u sind; mache man

$$\alpha = k + \frac{1}{k},$$

so genügen diese beiden Polynome der folgenden linearen partiellen Differenzialgleichung:

$$u^2 (n^2-1) u^2 z + (n^2-1)(\alpha u - 2u^3) \frac{dz}{du}$$
$$+ (1 - \alpha u^2 + u^4) \frac{d^2 z}{du^2} = 2n^2 (\alpha^2 - 4) \frac{dz}{d\alpha}.$$

G. Von den Funktionen zweiter und dritter Gattung.

Man kommt auf dieselben durch die Betrachtung des Integrals

$$\int F\,(\sin \mathrm{am}\,x, \cos \mathrm{am}\,x, \varDelta\, \mathrm{am}\,x)\, dx,$$

wo F eine beliebige rationale Funktion anzeigt. Mit diesem wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Sei wie oben:

$$u = \sin \mathrm{am}\,x,$$
$$v = \cos \mathrm{am}\,x,$$
$$w = \varDelta\, \mathrm{am}\,x,$$

so sieht man leicht, dass das Integral sich auf die Form bringen lässt:

$$\int (A + Bv + Cw + Dvw)\, dx,$$

wo A B C D rationale Funktionen von u allein sind. Hieraus folgt dass nur der Theil

$$A\,dx$$

genauer untersucht zu werden braucht, denn für die beiden folgenden Theile lässt sich die Integration auf die von Quadratwurzeln aus algebraischen Funktionen zweiten Grades zurückführen, wenn man u als unabhängige Variable betrachtet, und der letzte Theil führt sogar auf rationale Funktionen. Also nur aus dem Ausdrucke $\int A\,dx$ kann man möglicherweise durch Integration neue Funktionen erhalten, und diese Vermuthung wird sich durch die folgenden Betrachtungen als richtig erweisen.

Sei

$$A = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)},$$

wo φ und ψ ganze Polynome bezeichnen. Indem man Zähler und Nenner des Bruches mit $\psi(-u)$ multiplicirt und setzt:

$$\psi(u)\,\psi(-u) = \Psi(u^2),$$

$$\varphi(u)\,\psi(-u) = \Phi(u^2) + u\,\Phi_1(u^2),$$

zerfällt unser Integral in die beiden folgenden:

$$\int \frac{\Phi(u^2)}{\Psi(u^2)}\,dx, \qquad \int u\,\frac{\Phi_1(u^2)}{\Psi(u^2)}\,dx,$$

von denen das zweite ebenfalls auf Wurzeln von Ausdrücken zweiten Grades zurückgeführt werden kann, denn setzt man $u^2 = t$, so wird es:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\Phi_1(t)}{\Psi(t)}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(t-k^2t)}}.$$

Wir haben uns also bloss mit dem ersten Integral zu beschäftigen, welches man durch Zerlegung von $\frac{\Phi(u^2)}{\Psi(u^2)}$ in Partialbrüche, auf Ausdrücke von der Form bringen kann:

$$\int u^{2n}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(1-\alpha u^2)^p},$$

oder

$$\int \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad \int \frac{du}{(1-\alpha u^2)^p \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Diese Ausdrücke aber können, wie wir gleich sehen werden, auf ihren einfachsten Fall, wo $n = 1$ und $p = 1$ ist, zurückgeführt werden. — Gehen wir zunächst von der Gleichung aus:

$$\frac{du^m}{dx} = m\,u^{m-1} \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

welche durch Differenziiren giebt:

$$\frac{d^2u^m}{dx^2} = m(m-1)u^{m-2} - m^2(1+k^2)u^m + m(m+1)k^2u^{m+2}.$$

Indem man beide Glieder dieser Gleichung in Bezug auf x integrirt, findet man folgende Reductionsformel:

$$\frac{du^m}{dx} = m(m-1)\int u^{m-2}\,dx - m^2(1+k^2)\int u^m\,dx$$
$$+ m(m+1)k^2 \int u^{m+2}\,dx.$$

Sie zeigt, wie man nach und nach das Integral, in welchem $m = 2n$ ist, auf die Fälle, wo $n = 0$ und $n = 1$ ist, zurückführen kann. Der erste giebt einen Ausdruck, der der Variablen proportional ist, der zweite führt ein neues analytisches Element in die Theorie der elliptischen Funktionen ein.

Wir führen als constanten Faktor das Quadrat des Modul ein, und setzen:

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \sin^2 \operatorname{am} x\,dx.$$

Dies ist die Funktion, die wir von jetzt an als die zweiter Gattung bezeichnen wollen.

Gehen wir ferner von der Relation aus:

$$\frac{u\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{(1-\alpha u^2)^{p-1}} = (2p-2)\left(1+\frac{1+k^2}{\alpha}+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^p}$$
$$-(2p-3)\left(1+\frac{2+2k^2}{\alpha}+\frac{3k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-1}}$$
$$+(2p-4)\left(\frac{1+k^2}{\alpha}+\frac{3k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-2}}$$
$$-(2p-5)\frac{k^2}{\alpha^2}\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-3}},$$

welche sich durch Differenziiren als identisch erweist. Es ist klar, dass hiernach der allgemeine Fall auf die drei besondern, wo $p = -1$, $p = 0$, $p = 1$ angenommen wird, zurückgeführt ist. Der erste Fall giebt die Funktion zweiter Gattung, der zweite einen der Variablen proportionalen Ausdruck, also nur der dritte führt zu einer neuen Funktion, die wir unter der Form:

$$\int \frac{A u^2 dx}{1-\alpha u^2},$$

welche wir statt:

$$\int \frac{dx}{1-\alpha u^2}$$

betrachten, untersuchen wollen. Es sei hier:

$$\alpha = k^2 \sin^2 \operatorname{am} a,$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{da} k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a.$$

Wir wollen setzen:

$$\Pi(x, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x \, dx}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x},$$

und diese Funktion bezeichnen wir als die der dritten Gattung

I. Ausdruck der Funktionen zweiter und dritter Gattung in Θ (x).

Oben haben wir folgende Gleichung aufgestellt:

$$\sin \operatorname{am} x (\sin^2 \operatorname{am} x + A) + B \frac{d \sin \operatorname{am} x}{dx} = C \frac{H(x-\alpha_1) H(x-\alpha_2) H(x \quad \alpha_3)}{\Theta^3 (x)},$$

wo die Coefficienten A und B durch α_1 und α_2 ausgedrückt werden können, wenn man setzt:

$$\sin \operatorname{am} \alpha_1 (\sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 + A) + B \frac{d \sin \operatorname{am} \alpha_1}{d\alpha_1} = 0,$$

$$\sin \operatorname{am} \alpha_2 (\sin^2 \operatorname{am} \alpha_2 + A) + B \frac{d \sin \operatorname{am} \alpha_2}{d\alpha_2} = 0.$$

Sei

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = a$$

und folglich:

$$\alpha_3 = 0$$

nach der Bedingung:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

so findet man:

$$B = 0, \quad A = -\sin^2 \operatorname{am} a$$

und folglich:

$$\sin \operatorname{am} x (\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a) = C \frac{H(x+a) H(x-a) H(x)}{\Theta^3(x)}.$$

Bestimmen wir C, indem wir $x = 0$ setzen, so wird schliesslich:

$$\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a = \frac{\Theta^2(0)\, H(x+a)\, H(x-a)}{k\, \Theta^2(x)\, \Theta^2(a)}.$$

Diese wichtige Beziehnng nimmt, wenn man a durch $a + iK'$ ersetzt, die neue Form an:

$$1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x = \frac{\Theta^2(0)\, \Theta(x+a)\, \Theta(x-a)}{\Theta^2(x)\, \Theta^2(a)}.$$

Hierzu kann man auch leicht vermittelst der Identität:

$$\frac{1}{k} \frac{H(x+a)\, H(x-a)}{\Theta(x+a)\, \Theta(x-a)} = \sin \operatorname{am}(x+a) \sin \operatorname{am}(x-a)$$
$$= \frac{\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}$$

gelangen. Nimmt man jetzt auf beiden Seiten unserer Gleichung die Logarithmen, so ergiebt sich:

$$\lg(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x) = \lg \Theta^2(0) + \lg \Theta(x+a) + \lg \Theta(x-a)$$
$$2 \lg \Theta(x) - 2 \lg \Theta(a),$$

und hieraus erhält man, wenn man in Bezug auf a differenziirt und in Bezug auf x integrirt:

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^3 \operatorname{am} x}$$
$$= \Pi(x, a) = x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Das ist der analytische Ausdruck der Funktion dritter Gattung, wie ihn Jakobi entdeckt hat.

Wenn man durch a dividirt und dann $a = 0$ setzt, erhält man:

$$\int_0^x k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx = Z(x) = \zeta(x) - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$

wo gesetzt wurde:

$$\zeta = 8 \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + 25q^{25} - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots}.$$

Dies ist der Ausdruck für die Funktion zweiter Gattung, den ebenfalls Jakobi gegeben hat, und der uns zugleich zu den Grundeigenschaften dieser Funktion führen wird.

II. Von der Funktion Z (x).

Die erste ihrer Eigenschaften ist, dass sie für jeden reellen und imaginären Werth der Variablen nur eine einzige Bestimmung zulässt. Dies folgt auch aus der Betrachtung des Integrals $\int_0^k k^2 \sin^2 \operatorname{am} z \, dz$ unmittelbar. In der That ist für eine beliebige Wurzel der Gleichung:

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am}(z)} = 0,$$

nämlich für:

$$z = 2mK + (2m' + 1) i K'$$

das entsprechende Residuum*) von $k^2 \sin^2 \operatorname{am} z$, d. h. der Coefficient von $\frac{1}{\varepsilon}$ in

$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} [2mK + (2m' + 1) i K' + \varepsilon] = \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon}$$

gleich Null. Denn $\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon$ enthält in seiner Entwickelung nur grade Potenzen von ε. Die Integration, welche Wege auch die Variable z zurücklege, führt daher nur zu einer einzigen Bestimmung. Wir können also ohne Zweideutigkeit, indem wir uns der Weierstrass'schen Bezeichnungen bedienen:

$$J = \int_0^K k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx,$$

$$i J' = \int_K^{K + iK'} k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx$$

setzen.

---

*) Die zum Verständniss nothwendigen Sätze des Cauchy'schen Residuencalculs enthält der Anhang. D. U.

Diese Grössen heissen vollständige Funktionen zweiter Gattung, und sind mit den vollständigen Funktionen der ersten Gattung K und K' durch die schon erwähnte Gleichung verbunden:

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2},$$

welche wir jetzt beweisen wollen.

Zu dem Ende setzen wir nach einander

$$z = K,$$

$$z = K + iK',$$

in der Grundgleichung:

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}.$$

Die erste Substitution giebt augenblicklich:

$$J = \zeta K,$$

da

$$\theta'(K) = 0.$$

Was die zweite anbetrifft, so gehen wir von der Beziehung, welche Seite 18 gegeben ist, aus:

$$\theta_1(x + iK') = H_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

aus ihr ergiebt sich:

$$\lg \theta_1(x + iK') = \lg H_1(x) - \frac{i\pi}{4K}(2x + iK').$$

Differenziirt man in Bezug auf x, so erhält man:

$$\frac{\theta'_1(x + iK')}{\theta_1(x + iK')} = \frac{H'_1(x)}{H_1(x)} - \frac{i\pi}{2K}.$$

Setzt man $x = 0$, so wird die Ableitung der graden Funktion $H_1(x)$ verschwinden, und man bekommt:

$$\frac{\theta'_1(iK')}{\theta_1(iK')} = \frac{\theta'(K + iK')}{\theta(K + iK')} = -\frac{i\pi}{2K};$$

hieraus folgt:

$$Z(K + iK') = \zeta(K + iK') + \frac{i\pi}{2K},$$

und folglich:

$$J' = \frac{Z(K + iK') - Z(K)}{i} = \zeta K' + \frac{\pi}{2K}.$$

Ersetzt man ζ durch $\frac{J}{K}$, so hat man die zu beweisende Gleichung. Ist der Modul k reell und kleiner als Eins, so kann man J und J' durch gradlinige Integrale ausdrücken:

$$J = \int_0^1 \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$J' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

und ganz wie für K und K' erhält man die Reihen:

$$J = \frac{\pi}{2}\mathfrak{J},$$

$$J' = \mathfrak{J} \lg\frac{4}{k} + 1 - (\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_1) - \frac{2}{3.4}(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_2) - \frac{2}{5.6}(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_3) - \ldots,$$

wo

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \frac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^6 + \frac{7}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^8 + \ldots,$$

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \ldots + \frac{2n-3}{2n-2}\left(\frac{1.3\ldots 2n-5}{2.4\ldots 2n-4}\right)^2 k^{2n-2}$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{2n-1}{2n}\left(\frac{1.3\ldots 2n-3}{2.4\ldots 2n-2}\right)^2 k^{2n}.$$

Diejenige Eigenschaft der Funktion zweiter Gattung aber, welche als charakteristisch zu betrachten ist, und welche ihre Einführung als ganz neues analytisches Element in die Theorie der elliptischen Funktionen rechtfertigt, ist die durch folgende Gleichungen gegebene:

$$Z(x + 2K) = Z(x) + 2J,$$
$$Z(x + 2iK') = Z(x) + 2iJ'.$$

Diese Beziehungen, welche sich unmittelbar aus den Grundgleichungen:

$$\theta(x + 2K) = \theta(x),$$

$$\theta(x + 2iK') = \theta(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x + iK')}$$

ergeben, wenn man die logarithmischen Ableitungen nimmt, definiren in der That eine neue Art von Funktionen, welche eindeutig sind, und sich, wenn man die Argumente um die Grössen 2K und 2iK'

vermehrt, mit Hinzufügung einer Constanten reproduciren. Später wird man die Wichtigkeit dieses Kennzeichens einsehen, welches nicht mehr mit der doppelten Periodicität übereinstimmt, aber sich enge an dieselbe anschliesst. — Man gelangt übrigens dazu noch auf eine andere Art, indem man von der Gleichung ausgeht:

$$Z(x+a) = Z(x) + Z(a) + k^2 \sin am\, x \sin am\, a \sin am (x+a),$$

d. h. von dem Additionstheorem der Argumente in der Funktion zweiter Gattung, welches Jakobi folgendermassen beweist. — Differenziiren wir die Gleichung:

$$\Pi(x, a) = x \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)}$$

in Bezug auf x, so ergiebt sich:

$$\frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta am\, a \sin^2 am\, x}{1-k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, x}$$
$$= \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\frac{\theta'(x-a)}{\theta(x-a)} - \frac{1}{2}\frac{\theta'(x+a)}{\theta(x+a)}$$
$$= -Z(a) + \frac{1}{2} Z(x+a) - \frac{1}{2} Z(x-a),$$

also wenn man x und a vertauscht:

$$\frac{k^2 \sin am\, x \cos am\, x\, \Delta\, am\, x \sin^2 am\, a}{1-k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, x}$$
$$= -Z(x) + \frac{1}{2} Z(x+a) + \frac{1}{2} Z(x-a).$$

Addirt man diese Gleichungen Glied für Glied, so erhält man:

$$k^2 \sin am\, x \sin am\, a \sin am (x+a) = Z(x+a) - Z(x) - Z(a).$$

III. Von der Funktion Π (x, a).

Als eine der schönsten Entdeckungen Jakobi's ist die Darstellung von Π (x, a), worin zwei Grössen, das Argument x und der Parameter a, vorkommen, durch die Beziehung:

$$\Pi(x, a) = x \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)}$$

zu betrachten, in welcher nur die eine Funktion θ nebst ihrer Ableitung vorkommt. Es möchte selbst wegen der Einfachheit dieses Ausdrucks unnütz erscheinen, die Funktion dritter Ordnung mit

einer besondern Bezeichnung und als ein eigenes analytisches Element einzuführen. Indess ist diese Bezeichnung durch Legendre's Arbeiten, welche Jakobi's Entdeckung vorausgingen, einmal eingeführt, und wir werden sie bei der Darstellung der folgenden Sätze anwenden.

a) Vertauschung der Amplitude und des Parameter.

Unmittelbar erhält man aus der Grundgleichung:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = x \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} - a \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$$

oder auch:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = a Z(x) - x Z(a),$$

wenn man die Funktion zweiter Gattung einführt.

Diese Eigenschaft kann direkt bewiesen und auf die Integrale höherer Ordnung ausgedehnt werden durch folgende Methode, welche ebenfalls von Jakobi herrührt.

Sei $\varphi(x)$ ein Polynom von beliebigem Grade in Bezug auf x, welches jedoch zugleich mit x verschwindet, und

$$F(x, a) = \int_0^x \frac{\sqrt{\varphi a}\, dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}}.$$

Die Differenz $F(x, a) - F(a, x)$ oder die Summe der Integrale

$$\int_0^x \frac{\sqrt{\varphi a}\, dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} + \int_0^a \frac{\sqrt{\varphi x}\, da}{(x-a)\sqrt{\varphi a}}$$

lässt sich ersetzen durch das Doppelintegral:

$$\int_0^a \int_0^x \frac{dx\, da}{\sqrt{\varphi x}\sqrt{\varphi a}} \left[\frac{(\varphi' x + \varphi' a)(x-a) + 2\varphi a - 2\varphi x}{2(x-a)^2} \right].$$

Aber man findet leicht, dass die Grösse innerhalb der Klammer eine ganze Funktion von x und a ist*), so dass das Doppelintegral sich in eine Summe von Produkten von folgender Gestalt zerlegen lässt:

---

*) Die ganze Funktion:

$$\frac{(\varphi' x + \varphi' a)(x-a) + 2\varphi a - 2\varphi x}{2(x-a)}$$

verschwindet nämlich für $x = a$, wie man durch Differenziiren des Zählers und Nenners erkennt, und ist mithin durch $x - a$ theilbar. D. U.

$$\int_0^a \frac{a^m\, da}{\sqrt{\varphi a}} \times \int_0^x \frac{x^n\, dx}{\sqrt{\varphi x}}.$$

Der Fall der elliptischen Integrale würde sich hieraus offenbar ergeben, wenn man setzte:

$$\varphi(x) = x(1-x)(1-k^2 x)$$

und an Stelle der Variablen x und a die Grössen $\frac{1}{k^2 \sin^2 \operatorname{am} x}$ und $\sin^2 \operatorname{am} a$ nähme.

b) Von den vollständigen Funktionen.

In der obigen Gleichung:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = a\, Z(x) - x\, Z(a)$$

setzen wir:

$$x = K \quad \text{und} \quad x = K + iK';$$

mit Berücksichtigung, dass

$$\Pi(a, K) = 0,$$
$$\Pi(a, K + iK') = 0,$$

findet man:

$$\Pi(K, a) = a\, Z(K) - K\, Z(a) = a\, J - K\, Z(a)$$

und

$$\Pi(K + iK') - \Pi(K) = i a J' - iK' Z(a).$$

Dies sind also die Werthe der vollständigen Funktionen oder der bestimmten Integrale:

$$\Pi(K) = \int_0^K \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x},$$

$$\Pi(K + iK') - \Pi(K)$$
$$= \int_K^{K+iK'} \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

Bezeichnet man sie für einen Augenblick mit H und iH', so ergiebt sich:

$$\Pi(x + 2K, a) = \Pi(x, a) + 2H,$$
$$\Pi(x + 2iK', a) = \Pi(x, a) + 2iH',$$

und

$$KH' - HK' = \frac{a\pi}{2}.$$

Bemerken wir jedoch in Bezug auf die Funktion dritter Gattung, dass, wenn man den Weg sich ändern lässt, welchen die Variable bei der Integration beschreibt, ein positives oder negatives Vielfaches von $\pi\sqrt{-1}$ hinzutritt, so dass diese Relationen nur für gewisse Integrationswege stattfinden, während die analogen Beziehungen in Bezug auf die Funktion zweiter Gattung keiner Beschränkung ähnlicher Art unterliegen.

c) Addition der Argumente.

Betrachten wir, um einen bestimmten Fall zu haben, eine ungrade Zahl von Argumenten:

$$\alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_{2n+1},$$

welche durch die Gleichung verbunden sind:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 0.$$

Es wird dann die Grundgleichung:

$$\Pi(x, a) = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$$

geben:

$$\Pi(\alpha_1, a) + \Pi(\alpha_2, a) + \ldots + \Pi(\alpha_{2n+1}, a)$$
$$= \frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(\alpha_1 - a)\,\Theta(\alpha_2 - a)\ldots\Theta(\alpha_{2n+1} - a)}{\Theta(\alpha_1 + a)\,\Theta(\alpha_2 + a)\ldots\Theta(\alpha_{2n+1} + a)}.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass die Grösse unter dem logarithmischen Zeichen rational ausgedrückt werden kann durch:

$$\text{A)}\quad\left\{\begin{array}{l}\sin\mathrm{am}\,\alpha_1,\quad \sin\mathrm{am}\,\alpha_2\ \ldots\ \sin\mathrm{am}\,\alpha_{2n+1},\\[4pt] \dfrac{d\sin\mathrm{am}\,\alpha_1}{d\alpha_1},\ \dfrac{d\sin\mathrm{am}\,\alpha_2}{d\alpha_2}\ \ldots\ \dfrac{d\sin\mathrm{am}\,\alpha_{2n+1}}{d\alpha_{2n+1}}.\end{array}\right.$$

Zu dem Ende erinnern wir daran, dass, wenn $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}_1(x)$ zwei beliebige Polynome von x von den Graden n und n—1 sind, und wenn man setzt:

$$\varphi(x) = \sin\mathrm{am}\,x\,\mathfrak{F}(\sin^2\mathrm{am}\,x) + \frac{d\sin\mathrm{am}\,x}{dx}\,\mathfrak{F}_1(\sin^2\mathrm{am}\,x),$$

folgende Beziehung (Seite 61) erhalten wurde:

$$\varphi(x) = \frac{A\,H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

wo die Coefficienten der Polynome $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ durch die linearen Gleichungen:

$$\varphi(\alpha_1) = 0,\ \varphi(\alpha_2) = 0\ \ldots\ \varphi(\alpha_{2n}) = 0$$

bestimmt wurden, und also rationale Funktionen der Grössen A) waren. Vertauscht man nun x mit $-x$, so ergiebt sich:

$$\varphi(-x) = -\frac{A\,H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}{\theta^{2n+1}(x)},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(-x)} = -\frac{H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}.$$

Setzt man aber:

$$x = a + iK',$$

also:

$$\sin\operatorname{am} x = \frac{1}{k \sin\operatorname{am} a},$$

$$\frac{d\sin\operatorname{am} x}{dx} = -\frac{1}{k\sin^2\operatorname{am} a}\,\frac{d\sin\operatorname{am} a}{da},$$

so verwandelt sich die Grösse:

$$\frac{H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}$$

in:

$$\frac{\theta(a-\alpha_1)\,\theta(a-\alpha_2)\ldots\theta(a-\alpha_{2n+1})}{\theta(a+\alpha_1)\,\theta(a+\alpha_2)\ldots\theta(a+\alpha_{2n+1})}$$

und der Ausdruck für dieselbe ist nach dem Obigen:

$$\frac{\dfrac{1}{k\sin\operatorname{am} a}\,\mathfrak{F}\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} a}\right) - \dfrac{1}{k\sin^2\operatorname{am} a}\,\dfrac{d\sin\operatorname{am} a}{da}\,\mathfrak{F}_1\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} a}\right)}{\dfrac{1}{k\sin\operatorname{am} a}\,\mathfrak{F}\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} a}\right) + \dfrac{1}{k\sin^2\operatorname{am} a}\,\dfrac{d\sin\operatorname{am} a}{da}\,\mathfrak{F}_1\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} a}\right)}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\sin^{2m+1}\operatorname{am} a$, so nimmt er die Form an:

$$\frac{\sin\operatorname{am} a\,F(\sin^2\operatorname{am} a) - \dfrac{d\sin\operatorname{am} a}{da}\,F_1(\sin^2\operatorname{am} a)}{\sin\operatorname{am} a\,F(\sin^2\operatorname{am} a) + \dfrac{d\sin\operatorname{am} a}{da}\,F_1(\sin^2\operatorname{am} a)},$$

wo $F(x)$ und $F_1(x)$ ebenso wie $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}_1(x)$ Polynome von den Graden n und $n-1$ in Bezug auf x sind. — Wenn man nun das Argument α_{2n+1} durch $-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n})$ ersetzt, hat man die folgende Gleichung:

$$\Pi(\alpha_1, a)+\Pi(\alpha_2, a)+\ldots+\Pi(\alpha_{2n}, a) = \Pi(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n}, a)$$

$$+\frac{1}{2}\lg\frac{\sin am\, a\, F(\sin^2 am\, a) - \frac{d\sin am\, a}{da} F_1(\sin^2 am\, a)}{\sin am\, a\, F(\sin^2 am\, a) + \frac{d\sin am\, a}{da} F_1(\sin^2 am\, a)}.$$

Dies ist das Additionstheorem der Argumente unter der von Abel aufgestellten Form.

d) Von den verschiedenen der Funktion dritter Gattung analogen Funktionen.

Wichtige mechanische Untersuchungen führen oft dazu, Integrale, welche der Funktion dritter Gattung ähnlich sind und sich vermöge einfacher Substitution auf die Form derselben bringen lassen, auf die Funktionen Θ zurückzuführen. Daher hat Jakobi in seiner denkwürdigen Arbeit über die Rotation der Körper für nöthig gefunden, die folgende Zusammenstellung zu geben, welche diese verschiedenen Integrale, so wie ihren Ausdruck durch die Funktion Θ vollständig und unter der einfachsten Form enthält:

1) $$\int_0^x \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta am\, a \sin^2 am\, x\, dx}{1-k^2\sin^2 am\, a \sin^2 am\, x} = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

2) $$\int_0^x \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a \cos^2 am\, x\, dx}{\Delta am\, a(1-k^2\sin^2 am\, a \sin^2 am\, x)} = -x\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)}-\frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

3) $$\int_0^x \frac{tg\, am\, a\, \Delta am\, a\, \Delta^2 am\, x\, dx}{1-k^2\sin^2 am\, a \sin^2 am\, x} = -x\frac{H'_1(a)}{H_1(a)}-\frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

4) $$\int_0^x \frac{\Delta am\, a \cot am\, a\, dx}{1-k^2\sin^2 am\, a \sin^2 am\, x} = x\frac{H'(a)}{H(a)}+\frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

5) $$\int_0^x \frac{\sin am\, a \cos am\, a\, \Delta am\, a\, dx}{\sin^2 am\, a - \sin^2 am\, x} = -x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\lg\frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

6) $$\int_0^x \frac{\sin am\, a \cos am\, a\, \Delta^2 am\, x\, dx}{\Delta am\, a(\sin^2 am\, a - \sin^2 am\, x)} = -x\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)}+\frac{1}{2}\lg\frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

7) $$\int_0^x \frac{tg\, am\, a\, \Delta am\, a \cos^2 am\, x\, dx}{\sin^2 am\, a - \sin^2 am\, x} = -x\frac{H'_1(a)}{H_1(a)}+\frac{1}{2}\lg\frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

8) $$\int_0^x \frac{\Delta am\, a \cot am\, a \sin^2 am\, x\, dx}{\sin^2 am\, a - \sin^2 am\, x} = -x\frac{H'(a)}{H(a)}+\frac{1}{2}\lg\frac{H(a+x)}{H(a-x)}.$$

Man kann diese Gleichungen unmittelbar beweisen. Die zweite, dritte und vierte nämlich folgen aus der ersten, wenn man x und a nach der Reihe vertauscht mit:

$$x + K, \; a + K,$$
$$x + K + iK', \; a + K + iK',$$
$$x + iK', \; a + iK'.$$

Aus den so erhaltenen Gleichungen werden die vier letzten gefunden, wenn man x durch $x + iK'$ in jeder ersetzt.*)

II. Von den Weierstrass'schen Funktionen.

Es wurde bereits bemerkt, dass sin am x, cos am x, $\varDelta$ am x für Werthe von x, welche kleiner als Eins sind, in Reihen nach Potenzen der Variablen entwickelt werden können, deren Coefficienten ganze Funktionen von k^2 mit rationalen Coefficienten sind. Offenbar findet Gleiches bei $\sin^2$ am x, bei der Funktion zweiter Ordnung:

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, x\, dx,$$

bei ihrem Integral:

$$\int_0^x Z(x)\, dx$$

und selbst bei dem Ausdrucke

$$e^{-\int_0^x Z(x)\, dx}$$

statt. Aber während für $\sin^2$ am x, $Z(x)$, $\int_0^x Z(x)\, dx$ die Ent-

*) Wenn man eine beliebige der acht Formen der Funktion dritter Gattung mit $\int_0^x F(x)\, dx$ bezeichnet, so hat $F(x)$ die Perioden $2K$ und $2iK'$, und man erhält die vorstehenden Ausdrücke unmittelbar mit Hülfe eines allgemeinen Ausdrucks der doppelt periodischen Funktionen, den man am Ende dieses Abrisses entwickeln wird, nämlich:

$$F(x) = C + \Sigma R \frac{H'(x-\zeta)}{H(x-\zeta)},$$

wo die Grössen ζ die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(x)} = 0$ bezeichnen und R die bezüglichen Residuen von $F(x)$.

wickelung nur für Werthe der Variablen stattfindet, deren Modul kleiner als Eins ist, führt die Fxponentialgrösse

$$e^{-\int_0^x Z(x)\,dx}$$

zu einer convergenten Entwickelung für jeden reellen und imaginären Werth von x. Nun wird man aus der Gleichung:

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$$

erhalten:

$$e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\theta(x)}{\theta(0)}.$$

Dies ist also eine sehr wichtige Eigenschaft der Funktion θ, dass sie sich nämlich durch Einführung des Faktors $e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\theta(0)}$ in eine neue Funktion verwandelt, wo das Argument nicht mehr unter dem Cosinuszeichen steht, und an der Stelle der Periode und der Transcendente $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ der Modul k^2 selbst vorkommt. Gleiches findet offenbar statt in Bezug auf die drei andern Funktionen:

$$\sin\text{am}\, x\, e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{H(x)}{\theta(0)}\frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\cos\text{am}\, x\, e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{H_1(x)}{\theta(0)}\sqrt{\frac{k'}{k}},$$

$$\Delta\text{am}\, x\, e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\theta_1(x)}{\theta(0)}\sqrt{k'}.$$

Hieraus folgt, dass neben den periodischen Entwickelungen:

$$\sin\text{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\cos\text{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\Delta\text{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

sich noch eine andere Art der Darstellung zeigt, wo die doppelt periodischen Funktionen durch Qotienten von Reihen ausgedrückt werden, die in Bezug auf x und k^2 rational sind, und für jeden reellen oder imaginären Werth dieser Grössen convergiren. Abel hat die Möglichkeit dieser neuen Entwickelungsweise der elliptischen Funktionen bemerkt und kurz angedeutet, aber Weierstrass kommt die Ehre zu, an Stelle eines blossen Ueberblickes eine tiefe Theorie in die Wissenschaft eingeführt zu haben, welche auf gradem Wege zu diesen neuen Funktionen führt, nicht nur in dem Falle der elliptischen Transcendenten, sondern auch für die Abel'schen mit einer beliebigen Anzahl von Variablen. Wir können hier nicht die Grundlagen angeben, auf welchen die grossen und schönen Entdeckungen dieses berühmten Mathematikers beruhen. Wir beschränken uns hier, ohne über die elliptischen Funktionen hinaus zu gehen, auf die folgenden Angaben.

I. Definition der vier Funktionen Al (x). Differenzialgleichungen.

Um unmittelbar diese Funktionen auf die vier: θ, H, θ_1, H_1, zurückzuführen, setzen wir:

$$\text{A)}\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(x) = e^{-\int_0^x Z(x)\,dx}, \\ \sin \mathrm{am}\, x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_1}{\mathrm{Al}(x)}, \\ \cos \mathrm{am}\, x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_2}{\mathrm{Al}(x)}, \\ \Delta \mathrm{am}\, x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_3}{\mathrm{Al}(x)}, \end{cases}$$

und folglich:

$$\text{B)}\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(x) = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{\theta(x)}{\theta(0)}, \\ \mathrm{Al}(x)_1 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{H(x)}{\theta(0)} \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \\ \mathrm{Al}(x)_2 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{H_1(x)}{\theta(0)} \sqrt{\dfrac{k'}{k}}, \\ \mathrm{Al}(x)_3 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{\theta_1(x)}{\theta(0)} \sqrt{k'}. \end{cases}$$

Aus den Beziehungen A) erhält man zunächst:

$$Al^2(x)_2 = Al^2(x) - Al^2(x)_1,$$
$$Al^2(x)_3 = Al^2(x) - k^2Al^2(x)_1.$$

Dann kann man aus den Gleichungen:

$$Al(x) = e^{-\int_0^x Z(x)\,dx},$$
$$\frac{Al(x)_1}{Al(x)} = \sin\operatorname{am}(x)$$

zwei Differenzialgleichungen ableiten, indem man zuerst die zweiten Ableitungen der Logarithmen beider Glieder nimmt, nämlich:

$$\frac{d^2 \lg Al(x)}{dx^2} = -k^2 \sin^2\operatorname{am} x = -k^2\frac{Al^2(x)_1}{Al^2(x)}$$

und

$$\frac{d^2 \lg Al(x)_1}{dx^2} - \frac{d^2 \lg Al(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \lg \sin\operatorname{am} x}{dx^2}$$
$$= k^2 \sin^2\operatorname{am} x - \frac{1}{\sin^2\operatorname{am} x},$$

woraus mit Hülfe der vorigen Gleichung folgt:

$$\frac{d^2 \lg Al(x)_1}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2\operatorname{am} x} = -\frac{Al^2(x)}{Al^2(x)_1}.$$

Durch Entwickelung erhält man folgende Differenzialgleichungen:

$$Al(x)\frac{d^2 Al(x)}{dx^2} - \left[\frac{d\, Al(x)}{dx}\right]^2 + k^2 Al^2(x)_1 = 0,$$

$$Al(x)_1\frac{d^2 Al(x)_1}{dx^2} - \left[\frac{d\, Al(x)_1}{dx}\right]^2 + Al^2(x) = 0.$$

Auf ähnliche Weise oder mittelst der algebraischen Relationen ergiebt sich:

$$Al(x)_2\frac{d^2 Al(x)_2}{dx^2} - \left[\frac{d\, Al(x)_2}{dx}\right]^2 + Al^2(x)_3 = 0,$$

$$Al(x)_3\frac{d^2 Al(x)_3}{dx^2} - \left[\frac{d\, Al(x)_3}{dx}\right]^2 + k^2 Al^2(x)_2 = 0.$$

Diese wichtigen Beziehungen, welche Weierstrass unmittelbar aus den Definitionsgleichungen:

$$\frac{d \sin am\, x}{dx} = \cos am\, x\, \Delta am\, x,$$

$$\frac{d \cos am\, x}{dx} = -\sin am\, x\, \Delta am\, x,$$

$$\frac{d\, \Delta am\, x}{dx} = -k^2 \sin am\, x \cos am\, x$$

ableitet und zwar durch eine Methode, welche sich auf die allgemeineren Abel'schen Transcendenten ausdehnen lässt, können dann auf eine neue Art auf die Funktionen θ führen, auch kann man mit ihrer Hülfe direkt beweisen, dass sie Funktionen definiren, welche in immer convergirende Reihen nach Potenzen der Variablen entwickelt werden können, so dass die Coefficienten dieser Reihen ganze Funktionen von k^2 mit rationalen Coefficienten sind. Um indess diese Entwickelungen auszuführen, verfolgt man einen andern einfachern Weg, der in dem Folgenden angedeutet ist.

II. Partielle Differenzialgleichungen, Entwickelungsformeln.

Eine etwas lange Entwickelung, die wir deshalb hier nicht ausführen können, führt Weierstrass auf folgende lineare, partielle Differenzialgleichungen:

$$\frac{d^2 Al(x)}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\,Al(x)}{dx} + 2kk'^2\frac{d\,Al(x)}{dk} + k^2x^2 Al(x) = 0,$$

$$\frac{d^2 Al(x)_1}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\,Al(x)_1}{dx} + 2kk'^2\frac{d\,Al(x)_1}{dk} + (k'^2+k^2x^2) Al(x)_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 Al(x)_2}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\,Al(x)_2}{dx} + 2kk'^2\frac{d\,Al(x)_2}{dk} + (1+k^2x^2) Al(x)_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 Al(x)_3}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\,Al(x)_3}{dx} + 2kk'^2\frac{d\,Al(x)_3}{dk} + (k^2+k^2x^2) Al(x)_3 = 0.$$

Diese wichtigen Gleichungen sind zur Reihenentwickelung ganz besonders geeignet, und man erhält aus ihnen folgende Formeln, wo $n!$ das Produkt von $1.2.3\ldots n$ bedeutet:

$$Al(x) = 1 - A_2\frac{x^4}{4!} + A_3\frac{x^6}{6!} - \ldots + (-1)^{m-1} A_m \frac{x^{2m}}{(2m)!}\ldots, \text{*)}$$

*) Das mit x^2 multiplicirte Glied fehlt in dieser Entwickelung. Dies zeigt der Ausdruck $e^{-\int_0^x Z(x)\,dx}$ schon a priori, wo die Reihe im Exponenten mit einem Gliede anfängt, das mit x^4 multiplicirt ist.

$$Al(x)_1 = x - B_1 \frac{x^3}{3!} + B_2 \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m B_m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \ldots,$$

$$Al(x)_2 = 1 - C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2 \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m C_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \ldots,$$

$$Al(x)_3 = 1 - D_1 \frac{x^2}{2!} + D_2 \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m D_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \ldots.$$

Man hat aber:

$$A_2 = 2k^2,$$
$$A_3 = 8(k^2+k^4),$$
$$A_4 = 32(k^2+k^6) + 68k^4,$$
$$A_5 = 128(k^2+k^8) + 480(k^4+k^6),$$
$$A^6 = 512(k^2+k^{10}) + 3008(k^4+k^8) + 5400k^6,$$
$$A_7 = 2048(k^2+k^{12}) + 17408(k^4+k^{10}) + 49568(k^6+k^8),$$
$$A_8 = 8192(k^2+k^{14}) + 95232(k^4+k^{12}) + 395520(k^6+k^{10}) + 603376k^8,$$
$$A_9 = 32768(k^2+k^{16}) + 499712(k^4+k^{14}) + 2853888(k^6+k^{12}) + 5668096(k^8+k^{10}),$$
$$A_{10} = 131072(k^2+k^{18}) + 2539520(k^4+k^{16}) + 19097600(k^6+k^{14}) + 38153728(k^8+k^{12}) + 42090784k^{10},$$

. . . .

$$B_1 = 1 + k^2,$$
$$B_2 = 1 + k^4 + 4k^2,$$
$$B_3 = 1 + k^6 + 9(k^2+k^4),$$
$$B_4 = 1 + k^8 + 16(k^2+k^6) - 6k^4,$$
$$B_5 = 1 + k^{10} + 25(k^2+k^8) - 494(k^4+k^6),$$
$$B_6 = 1 + k^{12} + 36(k^2+k^{10}) - 5781(k^4+k^8) - 12184k^6,$$
$$B_7 = 1 + k^{14} + 49(k^2+k^{12}) - 55173(k^4+k^{10}) - 179605(k^6+k^8),$$
$$B_8 = 1 + k^{16} + 64(k^2+k^{14}) - 502892(k^4+k^{12}) \quad 2279488(k^6+k^{10}) - 3547930k^8,$$
$$B_9 = 1+k^{18}+81(k^2+k^{16}) - 4537500(k^4+k^{14}) - 27198588(k^6+k^{12}) - 59331498(k^8+k^{10}),$$
$$B_{10} = 1+k^{20}+100(k^2+k^{18}) - 40856715(k^4+k^{16}) - 31380080(k^6+k^{14}) - 909015270(k^8+k^{12}) - 1278530856k^{10},$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 1, \\
C_2 &= 1+2k^2, \\
C_3 &= 1+6k^2+8k^4, \\
C_4 &= 1+12k^2+60k^4+32k^6, \\
C_5 &= 1+20k^2+348k^4+448k^6+128k^8, \\
C_6 &= 1+30k^2+2372k^4+4600k^6+2880k^8+512k^{10}, \\
C_7 &= 1+42k^2+19308k^4+51816k^6+45024k^8+16896k^{10} \\
&\qquad +2048k^{12}, \\
C_8 &= 1+56k^2+169320k^4+628064k^6+757264k^8+370944k^{10} \\
&\qquad +93184k^{12}+8192k^{14}, \\
C_9 &= 1+72k^2+1515368k^4+7594592k^6+12998928k^8 \\
&\qquad +9100288k^{10}+2725888k^{12}+491520k^{14}+32768k^{16}, \\
C_{10} &= 1+90k^2+13623480k^4+89348080k^6+211064400k^8 \\
&\qquad +219361824k^{10}+100242944k^{12}+18450432k^{14} \\
&\qquad +2506752k^{16}+131072k^{18},
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
D_1 &= k^2, \\
D_2 &= 2k^2+k^4, \\
D_3 &= 8k^2+6k^4+k^6, \\
D_4 &= 32k^2+60k^4+12k^6+k^8, \\
D_5 &= 128k^2+448k^4+348k^6+20k^8+k^{10}, \\
D_6 &= 512k^2+2880k^4+4600k^6+2372k^8+30k^{10}+k^{12}, \\
D_7 &= 2048k^2+16896k^4+45024k^6+51816k^8+69308k^{10}+42k^{12} \\
&\qquad +k^{14}, \\
D_8 &= 8192k^2+93184k^4+370944k^6+757264k^8+628064k^{10} \\
&\qquad +169320k^{12}+56k^{14}+k^{16}, \\
D_9 &= 32768k^2+491520k^4+2725888k^6+9100288k^8+12998928k^{10} \\
&\qquad +7594592k^{12}+1515368k^{14}+72k^{16}+k^{18}, \\
D_{10} &= 131072k^2+2506752k^4+18450432k^6+100242944k^8 \\
&\qquad +219361824k^{10}+211064400k^{12}+89348080k^{14} \\
&\qquad +13623480k^{16}+90k^{18}+k^{20},
\end{aligned}
$$

. . . .

Aber die partiellen Differenzialgleichungen dienen nicht allein dazu, die Rechnung, deren Ergebniss hier nach Weierstrass angeführt ist, zu erleichtern, sie geben auch z. B. einen leichten Beweis der folgenden Gleichungen, welche sich auf die Transformation der ersten Ordnung beziehen:

$$\mathrm{Al}\left(k\,x, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}\,(x, k),$$

$$\mathrm{Al}\left(k\,x, \frac{1}{k}\right)_1 = k\,\mathrm{Al}\,(x, k)_1,$$

$$\mathrm{Al}\left(k\,x, \frac{1}{k}\right)_2 = \mathrm{Al}\,(x, k)_3,$$

$$\mathrm{Al}\left(k\,x, \frac{1}{k}\right)_3 = \mathrm{Al}\,(x, k)_2,$$

$$\mathrm{Al}\,(i\,x, k') = e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}\,(x, k)_2,$$

$$\mathrm{Al}\,(i\,x, k')_1 = i\,e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}\,(x, k)_1,$$

$$\mathrm{Al}\,(i\,x, k')_2 = e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}\,(x, k),$$

$$\mathrm{Al}\,(i\,x, k')_3 = e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}\,(x, k)_3.$$

Noch bemerken wir, dass, wenn man so von den Funktionen θ (x) auf die Al (x) übergeht, welche den periodischen Charakter ganz verloren haben, die Quotienten $\frac{\mathrm{Al}\,(x)_1}{\mathrm{Al}\,(x)}$, $\frac{\mathrm{Al}\,(x)_2}{\mathrm{Al}\,(x)}$, $\frac{\mathrm{Al}\,(x)_3}{\mathrm{Al}\,(x)}$ ihre doppelte Periodicität als Folge der nachstehenden Gleichungen haben, welche unmittelbar sich aus den Gleichungen B) (Seite 86) ergeben, wenn man sich erinnert, dass

$$\zeta = \frac{J}{K}$$

und

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2}$$

waren:

$$\mathrm{Al}\,(x+2K) = +\,\mathrm{Al}\,(x)\,e^{-2J(x+K)},$$
$$\mathrm{Al}\,(x+2K)_1 = -\,\mathrm{Al}\,(x)_1\,e^{-2J(x+K)},$$
$$\mathrm{Al}\,(x+2K)_2 = -\,\mathrm{Al}\,(x)_2\,e^{-2J(x+K)},$$
$$\mathrm{Al}\,(x+2K)_3 = \mathrm{Al}\,(x)_3\,e^{-2J(x+K)},$$

und

$$\mathrm{Al}\,(x+2iK') = -\,\mathrm{Al}\,(x)\,e^{-2iJ'(x+iK')},$$
$$\mathrm{Al}\,(x+2iK')_1 = -\,\mathrm{Al}\,(x)_1\,e^{-2iJ'(x+iK')},$$
$$\mathrm{Al}\,(x+2iK')_2 = +\,\mathrm{Al}\,(x)_2\,e^{-2iJ'(x+iK')},$$
$$\mathrm{Al}\,(x+2iK')_3 = +\,\mathrm{Al}\,(x)_3\,e^{-2iJ'(x+iK')}.$$

J. Entwickelung der elliptischen Funktionen in einfache Reihen nach Sinus und Cosinus.

Es ist dies eine neue Art analytischer Ausdrücke, die sich wesentlich von denjenigen, die wir bis jetzt betrachtet haben, dadurch unterscheidet, dass bei den jetzt folgenden die Variable in gewissen Grenzen bleiben muss; ändern sich diese Grenzen, so ändert sich auch die Form der Entwickelung. Da man indess, um alle reellen und imaginären Werthe des Arguments zu umfassen, nur einer endlichen Anzahl von Entwickelungen bedarf, und übrigens in jedem Intervall die zugehörige Entwickelung für jeden Werth der Perioden und des Modul besteht, so kann man vermuthen, dass die Untersuchung dieser Art von Ausdrücken ebenfalls Gelegenheit geben wird, zu den Grundeigenschaften der neuen Transcendenten zu gelangen. Dies findet wirklich Statt, und auf natürliche Weise gelangt man sogar hierdurch auf die Zurückführung jeder doppelt periodischen Funktion auf elliptische Funktionen, wie es der Liouville'sche Satz, der Seite 5 angeführt wird, ausspricht, und welchen wir danach beweisen werden. Aber unter einem andern Gesichtspunkt und blos durch die Identität der Reihen und der Quotienten von Reihen kommt man auf die verborgensten und wichtigsten Eigenschaften der Zahlen, Eigenschaften, die um so interessanter werden, als sie so unvermutheter Weise sich als in engster Verbindung mit den analytischen Transcendenten stehend ergeben. Wir beschränken uns hier auf diese Andeutung, indem wir auf diese sehr ausgedehnte Seite der Theorie der elliptischen Funktionen, welche auf's Engste mit den schönen Entdeckungen über numerische Funktionen verknüpft ist, welche die Wissenschaft Liouville verdankt, nicht eingehen können.

I. Erste Methode.

Diese folgt naturgemäss aus der Gleichung*):

$$\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A(1-2q\cos 2x+q^2)\ (1-2q^3\cos 2x+q^6)$$
$$(1-2q^5\cos 2x-q^{10})\ldots.$$

Geht man nämlich von der bekannten Entwickelung aus:

---

*) Siehe Seite 17.

$$-\frac{1}{2}\lg(1-2q\cos 2x+q^2) = q\cos 2x + q^2\frac{\cos 4x}{2} + q^3\frac{\cos 6x}{3} + q^4\frac{\cos 8x}{4} + \ldots,$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lg\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \text{const} &- \cos 2x\,(q+q^3+q^5+\ldots)\\ &- \frac{\cos 4x}{2}(q^2+q^6+q^{10}+\ldots)\\ &- \frac{\cos 6x}{3}(q^3+q^9+q^{15}+\ldots)\\ &- \frac{\cos 8x}{4}(q^4+q^{12}+q^{20}+\ldots)\ldots.\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lg\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \text{const} &- \frac{q\cos 2x}{1-q^2} - \frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^4)} - \frac{q^3\cos 6x}{3(1-q^6)}\\ &- \frac{q^4\cos 8x}{4(1-q^8)} - \ldots.\end{aligned}$$

Hieraus findet man die Entwickelung der Funktionen zweiter und dritter Gattung mittelst der Gleichungen:

$$\Pi(x, a) = x\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\lg\frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)},$$

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}.$$

Diese geben nämlich:

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2Ka}{\pi}\right) &= \frac{2Kx}{\pi}\,\frac{\theta'\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}{\theta\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}\\ &\quad + \frac{q\cos 2(x+a)}{1-q^2} + \frac{q^2\cos 4(x+a)}{2(1-q^4)} + \ldots\\ &\quad - \frac{q\cos 2(x-a)}{1-q^2} - \frac{q^2\cos 4(x-a)}{2(1-q^4)} - \ldots\\ &= \frac{2Kx}{\pi}\,\frac{\theta'\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}{\theta\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)} - 2\left[\frac{q\sin 2a\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4a\sin 4x}{2(1-q^4)}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{q^3\sin 6a\sin 6x}{3(1-q^6)} + \ldots\right]\end{aligned}$$

und

$$\frac{K}{2\pi} Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\zeta K^2}{\pi^2} x - \left[\frac{q \sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2 \sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \dots\right].$$

Indem man die letztere Gleichung in Bezug auf x differenziirt, erhält man noch:

$$\frac{k^2 K^2}{2\pi^2} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\zeta K^2}{2\pi^2} - \left[\frac{q \cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2 \cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3 \cos 6x}{1-q^6} + \dots\right].$$

Indess wollen wir auf sin am x, cos am x, Δ am x kommen, und dasselbe Verfahren muss dann anwendbar sein, wenn man diese Funktionen unter die Form logarithmischer Ableitungen von solchen Ausdrücken bringen kann, die wie Θ (x) sich in Faktoren zerlegen lassen. Aber man hat wirklich:

$$k \sin \operatorname{am} x = \frac{d \lg (\Delta \operatorname{am} x - k \cos \operatorname{am} x)}{dx},$$

$$ik \cos \operatorname{am} x = \frac{d \lg (\Delta \operatorname{am} x + ik \sin \operatorname{am} x)}{dx},$$

$$i \Delta \operatorname{am} x = \frac{d \lg (\cos \operatorname{am} x + i \sin \operatorname{am} x)}{dx}.$$

Die Grössen unter dem logarithmischen Zeichen lassen sich aber folgendermassen ausdrücken:

$$\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} - k \cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{(1-2\sqrt{q}\cos x+q)(1-2\sqrt{q^3}\cos x+q^3)(1-2\sqrt{q^5}\cos x+q^5)\dots}{(1+2\sqrt{q}\cos x+q)(1+2\sqrt{q^3}\cos x+q^3)(1+2\sqrt{q^5}\cos x+q^5)\dots},$$

$$\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} + ik \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{(1-2\sqrt{-q}\sin x-q)(1-2\sqrt{-q^3}\sin x-q^3)(1-2\sqrt{-q^5}\sin x-q^5)\dots}{(1+2\sqrt{-q}\sin x-q)(1+2\sqrt{-q^3}\sin x-q^3)(1+2\sqrt{-q^5}\sin x-q^5)\dots},$$

$$\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} + i \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{e^{2ix}(1-q e^{-2ix})(1-q^3 e^{2ix})(1-q^5 e^{-2ix})\dots}{(1-q e^{2ix})(1-q^3 e^{-2ix})(1-q^5 e^{2ix})\dots}.$$

Eine der vorigen ganz ähnliche Rechnung führt dann zu folgenden Formeln:

$$\frac{kK}{2\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q} + \frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} + \frac{\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

$$\frac{kK}{2\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sqrt{q}\cos x}{1+q} + \frac{\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3} + \frac{\sqrt{q^5}\cos 5x}{1+q^5} + \ldots,$$

$$\frac{K}{2\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{4} + \frac{q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{q^2\cos 4x}{1+q^4} + \frac{q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots.$$

Was die Ausdrücke für die Grössen:

$$\Delta\,\mathrm{am}\,x - k\cos\mathrm{am}\,x,$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,x + ik\sin\mathrm{am}\,x,$$

$$\cos\mathrm{am}\,x + i\sin\mathrm{am}\,x$$

anbetrifft, deren wir uns hier bedient haben, so beschränken wir uns darauf einen zu beweisen, da dieselbe Methode auch zu den andern führt, und wollen wir dazu den letzten wählen, da die vorhergehenden sich in den Fundamenta finden, denn sie ergeben sich aus der Gleichung 5) Seite 86 daselbst, wenn man für den ersten x in $\frac{\pi}{2} - x$, für den zweiten q in $-q$ verwandelt.

Zu dem Ende sei zunächst, wie auf Seite 16:

$$\varphi(x) = 1 - e^{\frac{i\pi x}{K}}$$

und der Ausdruck, von dem wir beweisen wollen, dass er gleich:

$$\cos\mathrm{am}\,x + i\sin\mathrm{am}\,x$$

sei, nimmt die Form an:

$$\frac{e^{\frac{i\pi x}{2K}}\varphi(-x+iK')\varphi(x+3iK')\varphi(-x+5iK')\ldots}{\varphi(x+iK')\varphi(-x+3iK')\varphi(x+5iK')\ldots}.$$

Man sieht hieraus, dass, wenn man Zähler und Nenner mit:

$$A\,\varphi(-x+iK')\varphi(x+3iK')\varphi(-x+5iK')\ldots$$

multiplicirt, wo A eine Constante ist, man den Ausdruck auf eine Form bringt, wo $\theta(x)$ den Nenner bildet. Setzen wir also:

$$\Phi(x) = A\,e^{\frac{i\pi x}{K}}\varphi^2(-x+iK')\varphi^2(x+3iK')\varphi^2(-x+5iK')\ldots,$$

so ist offenbar:

$$\Phi(x+2K) = -\Phi(x),$$

und ausserdem:

$$\Phi(x+4iK') = \Phi(x)\, q^2 \frac{\varphi^2(-x-3iK')}{\varphi^2(x+3iK')} = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+2iK')}.$$

Den beiden Gleichungen:

$$\Phi(x+2K) = -\Phi(x),$$

$$\Phi(x+4iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+2iK')}$$

wird aber durch ganze Funktionen in allgemeinster Weise genügt, wenn man nimmt:

$$\Phi(x) = C\, H(x) + C_1\, H_1(x),$$

derart, dass man setzen kann:

$$\frac{e^{\frac{i\pi x}{2K}}\, \varphi(-x+iK')\, \varphi(x+3iK')\, \varphi(-x+5iK')\ldots}{\varphi(x+iK')\, \varphi(-x+3iK')\, \varphi(x+5iK')\ldots}$$

$$= \frac{C\, H(x) + C_1\, H_1(x)}{\Theta(x)} = A \cos \mathrm{am}\, x + i B \sin \mathrm{am}\, x,$$

wo A und B Constanten sind, die man durch einen besondern Fall bestimmt. Ist z. B. $x = 0$ und $x = K$, so erhält man ohne Weiteres $A = 1$, $B = 1$, wodurch unsere Formel bewiesen ist. —

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch bemerken, dass die allgemeinste Art, den Gleichungen:

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x+4iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+4iK')},$$

welche die vorstehenden in sich schliessen, durch ganze Funktionen Genüge zu leisten, gefunden wird, wenn man mit vier beliebigen Constanten setzt:

$$\Phi(x) = A\, \Theta(x) + B\, H(x) + C\, \Theta_1(x) + D\, H_1(x).$$

Dieser Ausdruck, von dem man mittelst der Beziehungen auf Seite 28 von vorn herein sieht, dass er eine Auflösung giebt, ist in der That der allgemeinste. Denn setzt man:

$$\Phi(x) = \sum a_m\, e^{\frac{mi\pi x}{2K}},$$

oder vielmehr:

$$\Phi(x) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{4}}\, e^{\frac{mi\pi x}{2K}},$$

so führt die zweite der Bedingungen zu dem Ausdruck:

$$a_{m+4} = a_m,$$

so dass in dem Ausdrucke von Φ (x) nur vier Constanten vorkommen können.

II. Anordnung der vorstehenden Reihen nach Potenzen von q.

Diese Entwickelungen sind unmittelbar durch das Vorstehende gegeben. So erhielt man z. B., ehe man die geometrischen Progressionen summirte:

$$\begin{aligned}\frac{kK}{2\pi} \sin am \frac{2Kx}{\pi} &= \sin x \sqrt{q}\,(1 + q + q^2 + \ldots) \\ &+ \sin 3x \sqrt{q^3}\,(1 + q^3 + q^6 + \ldots) \\ &+ \sin 5x \sqrt{q^5}\,(1 + q^5 + q^{10} + \ldots) + \ldots \\ &= \sin x \sum \sqrt{q^{2m+1}} \\ &+ \sin 3x \sum \sqrt{q^{3(2m+1)}} \\ &+ \sin 5x \sum \sqrt{q^{5(2m+1)}} + \ldots,\end{aligned}$$

oder unter der Form einer Doppelsumme:

$$\frac{kK}{2\pi} \sin am \frac{2Kx}{\pi} = \sum \sin(2\mu + 1) \sqrt{q^{(2\mu+1)(2m+1)}}.$$

Setzen wir also:

$$(2\mu + 1)(2m + 1) = M,$$

so stellt M alle ungraden Zahlen vor, und der Coefficient eines beliebigen Gliedes $\sqrt{q^M}$ in der Reihe wird die Summe aller Grössen $\sin(2\mu + 1)x$ sein, wo $2\mu + 1$ ein Faktor von M ist. Da aber jeder Faktor einer ungraden Zahl selbst ungrade ist, so kann man einfach schreiben, indem man unter μ einen Faktor von M versteht:

$$\frac{kK}{2\pi} \sin am \frac{2Kx}{\pi} = \sum \sqrt{q^M} \sum \sin \mu x.$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man:

$$\frac{kK}{2\pi} \cos am \frac{2Kx}{\pi} = \sum (-1)^{\frac{M-1}{2}} \sqrt{q^M} \sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos \mu x.$$

Was $\varDelta$ am x anbetrifft, so bezeichne man durch

$$N = 2^\nu M$$

eine beliebige ganze Zahl, wo 2^ν die höchste darin als Faktor enthaltene Potenz von 2 ist, so dass also M ungrade ist, man hat dann:

$$\frac{K}{2\pi} \varDelta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{4} + \sum (-1)^{\frac{M-1}{2}} q^N \sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos 2^{\nu+1} \mu x,$$

wo μ wie vorhin jeden Faktor der ungraden Zahl M andeutet. Höchst überraschend ist der zahlentheoretische Charakter dieser Ausdrücke:

$$\sum \sin \mu x,$$

$$\sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos \mu x,$$

$$\sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos 2^{\nu+1} \mu x;$$

sie bieten ein Beispiel der numerischen Funktionen dar, welche den Gegenstand der schönen Liouville'schen Untersuchungen bilden, und die einfache Art, durch die man mittelst der Theorie der elliptischen Funktionen auf sie geräth, lässt leicht die Wichtigkeit, welche diese Theorie für die Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen hat, ahnen.

III. Beweis der fundamentalen Differenzialgleichungen.

Bezeichnen wir mit m und m' alle ungraden positiven und negativen Zahlen, durch n alle ganzen graden und ungraden Zahlen, und setzen wir:

$$U = \sum \frac{\sqrt{q^m}\, e^{mix}}{1 - q^m},$$

$$V = \sum \frac{\sqrt{q^{m'}}\, e^{m'ix}}{1 + q^m},$$

$$W = \sum \frac{q^n\, e^{2nix}}{1 + q^{2n}}.$$

so hat man:

$$\frac{ikK}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = U,$$

$$\frac{kK}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = V,$$

$$\frac{K}{\pi}\varDelta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = W.$$

Es entsprechen dann den Gleichungen:

$$\frac{d\sin\operatorname{am}x}{dx} = \cos\operatorname{am}x\,\varDelta\operatorname{am}x,$$

$$\frac{d\cos\operatorname{am}x}{dx} = -\sin\operatorname{am}x\,\varDelta\operatorname{am}x,$$

$$\frac{d\varDelta\operatorname{am}x}{dx} = -k^2\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x$$

die folgenden:

$$\frac{dU}{dx} = 2iVW,$$

$$\frac{dV}{dx} = 2iUW,$$

$$\frac{dW}{dx} = 2iUV,$$

welche wir hier beweisen wollen. Zu dem Ende betrachten wir hier die Produkte:

$$VW = \sum\frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}e^{(m'+2n)ix}}{(1+q^{m'})(1+q^{2n})},$$

$$UW = \sum\frac{q^{\frac{m+2n}{2}}e^{(m+2n)ix}}{(1-q^{m})(1+q^{2n})},$$

$$UV = \sum\frac{q^{\frac{m+m'}{2}}e^{(m+m')ix}}{(1-q^{m})(1+q^{m'})},$$

und bemerkt man, dass identisch ist:

$$\frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}}{(1+q^{m'})(1+q^{2n})} = \frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}}{1-q^{m'+2n}}\left(\frac{1}{1+q^{m'}}-\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right),$$

$$\frac{q^{\frac{m+2n}{2}}}{(1-q^m)(1+q^{2n})} = \frac{q^{\frac{m+2n}{2}}}{1+q^{m+2n}}\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right),$$

$$\frac{q^{\frac{m+m'}{2}}}{(1-q^m)(1+q^{m'})} = \frac{q^{\frac{m+m'}{2}}}{1+q^{m+m'}}\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{m'}}{1+q^{m'}}\right),$$

und setzt man:

$$m + 2n = M,$$

$$m' + 2n = M',$$

$$m + m' = 2N,$$

derart, dass M und M' ungrade, N eine beliebige ganze Zahl ist; man kann dann schreiben:

$$VW = \sum \frac{\sqrt{q^{M'}}\, e^{M'ix}}{1-q^{M'}}\left(\frac{1}{1+q^{m'}} - \frac{q^{M'-m'}}{1+q^{M'-m'}}\right),$$

$$UW = \sum \frac{\sqrt{q^{M}}\, e^{Mix}}{1+q^{M}}\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right),$$

$$UV = \sum \frac{q^N e^{2Nix}}{1+q^{2N}}\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{2N-m}}{1+q^{2N-m}}\right).$$

Vergleicht man diese Ausdrücke bezüglich mit $\frac{dU}{dx}, \frac{dV}{dx}, \frac{dW}{dx}$, so sieht man, dass, um unsere Differenzialgleichung zu beweisen, man zeigen muss, dass folgende Beziehungen stattfinden, wo die Accente weggelassen sind:

$$M = 2\sum\left(\frac{1}{1+q^m} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right),$$

$$M = 2\sum\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right),$$

$$N = \sum\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{2N-m}}{1+q^{2N-m}}\right).$$

Das Verfahren ist für alle drei Gleichungen dasselbe; wir betrachten, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, die erste. Unterscheiden wir aber von einander die positiven und negativen Werthe von m. Die ersten führen zu dem Ausdruck:

$$\sum\left(\frac{1}{1+q^m} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right),$$

welche wir, indem wir M uns als positiv vorstellen, schreiben:

$$\sum \left(\frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}} - \frac{q^m}{1+q^m}\right),$$

da die identischen Beziehungen:

$$\frac{1}{1+q^m} = 1 - \frac{q^m}{1+q^m},$$

$$\frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}} = 1 - \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}}$$

stattfinden, die letztern, indem man $-m$ für m setzt, zu dem folgenden:

$$\sum\left(\frac{1}{1+q^{-m}} - \frac{q^{M+m}}{1+q^{M+m}}\right) = \sum\left(\frac{q^m}{1+q^m} - \frac{q^{M+m}}{1+q^{M+m}}\right)$$

derart, dass man für die ganze Summe hat:

$$\sum \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}} - \sum \frac{q^{m+M}}{1+q^{m+M}}.$$

Von $m = 2M + 1$ an aber sind alle Glieder der ersten Summe durch die zweite mit umgekehrten Vorzeichen gegeben und verschwinden also. So hat man demnach eine endliche Reihe:

$$\sum_{m=1}^{m=2M-1} \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}}.$$

Dieselbe trennen wir in zwei andere und schreiben das mittlere Glied ausserhalb des Summenzeichens; dies giebt:

$$\sum_{m=1}^{m=M-2} \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}} + \frac{1}{2} + \sum_{m=M+2}^{m=2M-1} \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}}.$$

Schreibt man aber $\frac{1}{1+q^{M-m}}$ statt $\frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}}$, so wird die erste Summe:

$$\frac{1}{1+q^2} + \frac{1}{1+q^4} + \dots + \frac{1}{1+q^{M-1}},$$

und indem man die Glieder derselben bezüglich zu denen der zweiten Reihe addirt, d. h. zu:

$$\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \dots + \frac{q^{M-1}}{1+q^{M-1}},$$

hat man die Einheit so oft, als die Anzahl der Glieder beträgt,

d. h. $\frac{M-1}{2}$ mal, hierzu das mittlere Glied $\frac{1}{2}$ addirt, erhält man endlich:

$$\frac{1}{2} + \frac{M-1}{2} = \frac{M}{2},$$

und dies ist das vorhin angegebene Ergebniss.

Nehmen wir endlich an, M sei negativ, so bemerken wir, dass der von uns betrachtete Ausdruck mit M sein Zeichen wechselt, so dass man hat:

$$\sum \left(\frac{1}{1+q^m} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}} \right) = - \sum \left(\frac{1}{1+q^m} - \frac{q^{-M-m}}{1+q^{-M-m}} \right).$$

In der That, setzt man im ersten Gliede $m + M$ für m, so erhält man identisch das allgemeine Glied der rechtsstehenden Reihe. — Wir haben hier an einem wichtigen Beispiele gezeigt, in welcher Art die neuen Entwickelungen ganz wie diejenigen, von denen wir bei Darstellung der Theorie ausgegangen sind, zu den Grundeigenschaften der elliptischen Funktionen führen können. Jetzt wollen wir die Vergleichung zwischen beiden Arten von Ausdrücken unter einem allgemeineren Gesichtspunkte auffassen, indem wir eine beliebige eindeutige doppelt periodische Funktion in eine einfache periodische Reihe entwickeln.

IV. Entwickelung einer doppelt periodischen Funktion in Sinus- und Cosinus-Reihen.

Sei F (z) die betrachtete Funktion, a und b ihre Perioden. Wir werden zunächst die Grenzen der Variablen aufsuchen, in welchen diese Funktion jedesmal durch eine bestimmte Sinus- und Cosinus-Reihe entwickelt wird, welche z. B. der Periode a entspricht. — Bemerken wir zu dem Ende, dass der Ausdruck:

$$z = at + bu,$$

wo t und u reell sind, jede complexe Grösse vorstellen kann, und dass, um alle Werthe, welche F (z) annehmen kann, zu erhalten, es in Anbetracht der doppelten Periodicität hinreicht, t und u alle reellen Werthe zwischen Null und Eins zu geben. Diese Bemerkung wenden wir auf die Wurzeln ζ der Gleichung $\frac{1}{F(z)} = 0$ an, wovon die Bestimmungen, welche wir im Auge haben, abhängen;

wir bezeichnen sie durch $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_s$, indem wir sie derart ordnen, dass wir u von Null bis Eins wachsen lassen, so dass ζ_s dem Werthe von $u = u_s$ entspricht. Sei jetzt υ_s eine zwischen u_s und u_{s+1} liegende Grösse*), wobei die Grenzwerthe ausgeschlossen sind; der Ausdruck:

$$F\,(at + b\upsilon_s)$$

wird dann für keinen reellen Werth von t unendlich werden und mithin sich folgendermassen entwickeln lassen:

$$F\,(at + b\upsilon_s) = \sum A_m^{(s)}\, e^{2mi\pi t},$$

welche für jeden Werth dieser Variablen convergirt Ist also die Anzahl der Grössen ζ_s endlich und gleich μ, so werden die Reihen:

$$\sum A_m^{(1)}\, e^{2mi\pi t},$$

$$\sum A_m^{(2)}\, e^{2mi\pi t},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum A_m^{(\mu)}\, e^{2mi\pi t}$$

in ihrer Gesammtheit die Funktion F (z) für $z = at + bu$ darstellen, worin t ganz beliebig, u kleiner als 1 ist, wo aber die Grössen:

$$at + bu_1,$$

$$at + bu_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$at + bu_\mu$$

ausgeschlossen sind. Und wenn man dieselben Reihen periodisch wiederholt, indem man u von Eins bis in's Unendliche wachsen und von Null bis zum negativ Unendlichen abnehmen lässt, so wird man den ganzen Umfang der complexen Werthe des Arguments umfassen und mit den angegebenen Ausnahmen eine vollständige Darstellung der Funktion gewonnen haben. Nachdem dies festgestellt ist, wollen wir die Grössen A_m bestimmen. Zu dem Ende werden wir das Grundprinzip der Residuenrechnung anwenden, welches in der Gleichung besteht:

---

*) Die Grösse υ_1 kann nicht allein als zwischen u_1 und 0, sondern auch als zwischen 0 und dem numerisch kleinsten negativen Werthe von u liegend angenommen werden.

$$\int f(z)\,dz = 2 i \pi \varDelta,\text{*)}$$

wo das erste Glied das Integral einer eindeutigen Funktion f (z) vorstellt, und zwar auf einem beliebigen geschlossenen Umfange genommen, und $\varDelta$ die Summe der Residuen von f (z) für alle Werthe der Veränderlichen, welche Punkten innerhalb dieses Umfanges entsprechen.

Dieser Cauchy'sche Satz auf den Fall angewandt, wo der Umfang ein Parallelogramm ist, dessen Eckpunkte den Grössen entsprechen:

$$p,\quad p+a,\quad p+a+b,\quad p+b,$$

und dessen Seiten folgende Gleichungen haben, wo die Veränderliche t von Null bis Eins wächst:

$$\begin{aligned} z &= p + at. \\ z &= p + a + bt, \\ z &= p + b + a(1-t), \\ z &= p + b(1-t), \end{aligned}$$

giebt:

$$a\int_0^1 f(p+at)\,dt + b\int_0^1 f(p+a+bt)\,dt$$
$$- a\int_0^1 f[p+b+a(1-t)]\,dt - b\int_0^1 f[p+b(1-t)]\,dt = 2 i\pi\varDelta,$$

oder einfacher:

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} & a\int_0^1 f(p+at)\,dt + b\int_0^1 f(p+a+bt)\,dt \\ - & a\int_0^1 f(p+b+at)\,dt - b\int_0^1 f(p+bt)\,dt = 2 i\pi\varDelta. \end{aligned} \right.$$

Im Uebrigen stellt nach der obigen Bezeichnung $\varDelta$ die Summe der Residuen von f (z) für alle Wurzeln ζ der Gleichung $\frac{1}{f(z)} = 0$ dar, welche durch die Formel:

$$\zeta = p + at + bu$$

dargestellt werden können, wo t und u zwischen Null und Eins liegen. Die Gleichung

$$F(at + b\omega_1) = \sum A_m^{(1)} e^{2mi\pi t}$$

giebt:

---

*) Vergleiche den Anhang. D. U.

$$A_m^{(1)} = \int_0^1 F(at + b\upsilon_1)\, e^{-2mi\pi t}\, dt,$$

wir können also die Beziehung 1) anwenden, indem wir setzen:

$$p = b\upsilon_1,$$

$$f(z) = F(z)\, e^{-2mi\pi \frac{z - b\upsilon_1}{a}}.$$

Man hat dann offenbar:

$$f(z+a) = f(z),$$

$$f(z+b) = f(z)\, q^{-2m},$$

wo, wie an einer früheren Stelle,

$$q = e^{i\pi \frac{b}{a}}$$

ist. Das erste Glied der Gleichung 1) reducirt sich also auf:

$$a\, A_m^{(1)}\, (1 - q^{-2m}).$$

Was das zweite Glied, d. h. die Residuumsumme der Funktion

$$F(z)\, e^{-2mi\pi \frac{z - b\upsilon_1}{a}}$$

für

$$z = \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\mu$$

anbetrifft, so wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, dass diese Grössen einfache Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(z)} = 0$ seien; bezeichnet man dann durch R_s die Grenze von $\varepsilon F(\zeta_s + \varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$, so findet man unmittelbar:

$$\varDelta = e^{2mi\pi \frac{b\upsilon_1}{a}} \left(R_1 e^{-2mi\pi \frac{\zeta_1}{a}} + R_2 e^{-2mi\pi \frac{\zeta_2}{a}} + \ldots + R_\mu e^{-2mi\pi \frac{\zeta_\mu}{a}} \right).$$

Und die gesuchte Entwickelung der Funktion $F(z)$ für $z = at + b\upsilon_1$ hat also die Form:

$$F(z) = \text{const} + \frac{2i\pi}{a} \left[R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z - \zeta_1)}}{1 - q^{-2m}} + R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z - \zeta_2)}}{1 - q^{-2m}} + \ldots \right.$$

$$\left. + R_\mu \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z - \zeta_\mu)}}{1 - q^{-2m}} \right].$$

Wir haben eine willkürliche Constante hinzugefügt und dafür in jeder Summe das Glied, welches $m = 0$ entspricht, weggelassen. In der That kann für diesen Fall $A_0^{(1)}$ nicht durch Gleichung:

$$a\, A_m^{(1)} (1 - q^{-2m}) = 2 i \pi \varDelta$$

bestimmt werden, sie giebt eben nur $\varDelta = 0$, d. h.:

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_\mu = 0.$$

Bevor wir jedoch weiter gehen, wollen wir eine Anwendung von der eben erhaltenen Formel machen, indem wir $F(z) = \sin am\, z$ setzen. Sei dann

$$a = 4\,K,$$
$$b = 2\,i\,K',$$

so hat man:

$$\zeta_1 = i\,K',$$
$$\zeta_2 = i\,K' + 2\,K,$$
$$R_1 = \lim\,[\varepsilon \sin am\,(i\,K' + \varepsilon)] = \frac{1}{k},$$
$$\mathfrak{q} = e^{-\frac{\pi K'}{2K}} = \sqrt{q},$$

und folglich:

$$\sin am\, z = \frac{i\pi}{2kK}\left[\sum \frac{e^{m\frac{i\pi}{2K}(z - iK')}}{1 - \mathfrak{q}^{-m}} - \sum \frac{e^{m\frac{i\pi}{2K}(z - iK' - 2K)}}{1 - \mathfrak{q}^{-m}}\right] + \text{const}$$

$$= \frac{i\pi}{2kK}\sum e^{m\frac{i\pi z}{2K}}\,\frac{\sqrt{q}^{-m}}{1 - \sqrt{q}^{-m}}\,[1 - (-1)^m] + \text{const}.$$

Man sieht, dass nur die ungraden Werthe von m bestehen bleiben, so dass, wenn man die Constante gleich Null setzt, man unmittelbar erhält:

$$\frac{ikK}{\pi} \sin am\, \frac{2Kz}{\pi} = \sum e^{mi\pi z}\,\frac{\sqrt{q^m}}{1 - q^m}.$$

Hier steht also im zweiten Gliede die Reihe, welche wir mit U bezeichnet haben (Seite 98).

Kehren wir jetzt zu den allgemeinen Betrachtungen zurück, namentlich zu den Entwickelungen, welche für $z = at + b\upsilon_1$ und $z = at + b\upsilon_2$ stattfinden. Im ersten Falle beziehen sich die Residuen auf die Werthe $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\mu$; geht man auf das folgende Intervall über, das durch die Gleichung $z = at + b\upsilon_2$ gegeben ist, so erhält man die Reihe: $\zeta_2, \zeta_3 \ldots \zeta_\mu, \zeta_1 + b$, und da die Re-

siduen von F (z) in Bezug auf ζ_1 und $\zeta_1 + b$ gleich sind, so geben diese beiden Entwickelungen mit Hinzufügung der constanten Glieder:

$$F(z) = \int_0^1 F(at + b\upsilon_1)\, dt + \frac{2i\pi}{a} R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1)}}{1 - q^{-2m}}$$

$$+ \frac{2i\pi}{a} R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1 - q^{-2m}} + \ldots$$

$$F(z) = \int_0^1 F(at + b\upsilon_2)\, dt + \frac{2i\pi}{a} R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1-b)}}{1 - q^{-2m}}$$

$$+ \frac{2i\pi}{a} R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1 - q^{-2m}} + \ldots$$

Wir haben also die constanten Glieder zu vergleichen. Wir bedienen uns zu diesem Ende der schon benutzten Gleichung, indem wir darin die Periode b durch eine beliebige Grösse β ersetzen, also:

$$a\int_0^1 F(p + at)\, dt + \beta\int_0^1 F(p + a + \beta t)\, dt - a\int_0^1 F(p + \beta + at)\, dt$$
$$- \beta\int_0^1 F(p + \beta t)\, dt = 2i\pi\Delta.$$

Setzen wir $p = b\upsilon_1$, $p + \beta = b\upsilon_2$, so giebt Δ nur ein einziges Residuum von F (z), das nämlich, welches $z = \zeta_1$ entspricht, und man hat unmittelbar:

$$\int_0^1 F(at + b\upsilon_1)\, dt - \int_0^1 F(at + b\upsilon_2)\, dt = \frac{zi\pi}{a} R_1.$$

Wir können also beide Entwickelungen so darstellen, dass sie aus ganz denselben analytischen Elementen bestehen, so dass, wenn die erste ist:

$$C + \frac{2i\pi}{a} R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1)}}{1 - q^{-2m}} + \frac{2i\pi}{a} R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1 - q^{-2m}} + \ldots$$

$$+ \frac{2i\pi}{a} R_\mu \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_\mu)}}{1 - q^{-2m}},$$

die andere sich nach Vereinigung der Glieder, welche R_1 haben, so schreiben lässt:

$$C + \frac{2i\pi}{a} R_1 \left[\sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1-b)}}{1-q^{-2m}} - 1 \right] + \frac{2i\pi}{a} R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-q^{-2m}} + \ldots$$

$$+ \frac{2i\pi}{a} R_\mu \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_\mu)}}{1-q^{-2m}}.$$

Hieraus lässt sich eine wichtige Folgerung ziehen, die Dasjenige rechtfertigen wird, was oben über die Funktionen zweiter Gattung gesagt wurde. — Bemerken wir nämlich, dass die verschiedenen Summen, welche in R_1, R_2 u. s. w. multiplicirt sind, allein aus der Entwickelung:

$$\sum \frac{e^{2m\frac{i\pi z}{a}}}{1-q^{-2m}}$$

hervorgehen, wenn man darin $z - \zeta_1$, $z - \zeta_2$ u. s. w., im zweiten Falle aber $z - \zeta_1 - b$ u. s. w. für z setzt. Setzt man nun $z - \frac{b}{2}$ für z, so nimmt diese Entwickelung die Form an:

$$\sum \frac{q^{-m} e^{2m\frac{i\pi z}{a}}}{1-q^{-2m}}.$$

Diese erinnert uns an einen schon bekannten analytischen Ausdruck. Sei nämlich $a = 2K$, $b = 2iK'$, folglich $q = q$, so hat man:

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{i\pi}{K} \sum \frac{q^{-m} e^{m\frac{i\pi z}{K}}}{1-q^{-2m}} = \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin \frac{m\pi z}{K};$$

man kann also für $z = at + bv_1$ setzen:

$$F(z - iK') = C + R_1 \frac{\theta'(z-\zeta_1)}{\theta(z-\zeta_1)} + R_2 \frac{\theta'(z-\zeta_2)}{\theta(z-\zeta_2)} + \ldots$$

$$+ R_\mu \frac{\theta'(z-\zeta_\mu)}{\theta(z-\zeta_\mu)},$$

und für $z = at + bv_2$:

$$F(z - iK') = C + R_1 \left[\frac{\theta'(z-\zeta_1-2iK')}{\theta(z-\zeta_1-2iK')} - \frac{i\pi}{K} \right]$$

$$+ R_2 \frac{\theta'(z-\zeta_2)}{\theta(z-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{\theta'(z-\zeta_\mu)}{\theta(z-\zeta_\mu)}.$$

Jetzt zeigt sich die ganze Wichtigkeit der charakteristischen Eigen-

schaft der Funktion zweiter Gattung in Bezug auf die doppelte Periodicität; in der That gelten die Beziehungen:

$$Z(x+2K) = Z(x) + 2J,$$
$$Z(x+2iK') = Z(x) + 2iJ'$$

den folgenden gleich:

$$\frac{\theta'(x+2K)}{\theta(x+2K)} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$
$$\frac{\theta'(x-2iK')}{\theta(x-2iK')} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} + \frac{i\pi}{K}.$$

Hieraus folgt, dass man auch durch Einführung der Transcendenten beide Entwickelungsformeln auf eine zurückführen kann, da die Grösse $\frac{\theta'(z-\zeta_1-2iK')}{\theta(z-\zeta_1-2iK')} - \frac{i\pi}{K}$ sich auf $\frac{\theta'(z-\zeta_1)}{\theta(z-\zeta_1)}$ reducirt. — Hieraus folgt eine analytische Beziehung, die für alle möglichen Werthe des Argumentes gilt, und deren schliessliche Form man, indem man von $F(z-iK')$ zu $F(z)$ übergeht, auf folgende Weise erhält. Rufen wir uns zunächst die Formel in's Gedächtniss:

$$\theta(x+iK') = i\,H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

woraus sich ergiebt, wenn man die logarithmischen Ableitungen beider Glieder nimmt:

$$\frac{\theta'(x+iK')}{\theta(x+iK')} = \frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{i\pi}{2K}.$$

Es folgt, wenn man $z+iK'$ für z setzt:

$$F(z) = C + R_1\frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)} + R_2\frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)} + \dots + R_\mu\frac{H'(z-\zeta_\mu)}{H(z-\zeta_\mu)}$$
$$- \frac{i\pi}{2K}(R_1 + R_2 + \dots + R_\mu),$$

oder einfach, da die Residuensumme gleich Null ist:

$$F(z) = C + R_1\frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)} + R_2\frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)} + \dots + R_\mu\frac{H'(z-\zeta_\mu)}{H(z-\zeta_\mu)}.$$

Endlich in dem Falle, wo ζ nicht mehr eine einfache Wurzel der Gleichung $\frac{1}{F(z)} = 0$ ist, sondern eine Wurzel nter Ordnung, wo dann die Gleichung stattfindet:

$$\varepsilon^n F(\zeta+\varepsilon) = A + B\varepsilon + \dots + Q\varepsilon^{n-2} + R\varepsilon^{n-1} + \dots$$

wird das einzelne Glied $R\,\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}$ in der Formel durch die nachstehende Summe ersetzt:

$$R\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}-Q\frac{d}{dz}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right]+\ldots+\frac{(-1)^{n+2}B}{1.2\ldots n-2}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right]$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}A}{1.2\ldots n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right].$$

V. Liouville'scher Satz.

Wir begründen den Beweis desselben auf die vorstehende Formel, indem wir darin setzen:

$$F(z)=\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)},$$

wo $\Phi(z)$ eine eindeutige doppelt periodische Funktion ist, deren Perioden wie oben $2K$ und $2iK'$ sein sollen. Die Wurzeln ζ sind dann die Auflösungen der Gleichungen:

$$\Phi(z)=0,\qquad \frac{1}{\Phi(z)}=0.$$

Wir wollen die ersten mit ζ, die letzteren mit ζ' bezeichnen, indem wir immer voraussetzen, dass sie durch die Formel:

$$p+2Kt+2iK'u$$

dargestellt werden, wo t und u zwischen Null und Eins liegen. Was die Residuen von $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$ anbetrifft, so weiss man, dass dieselben gleich $+1$ oder gleich -1 sind, je nachdem sie sich auf die Grössen ζ oder ζ' beziehen, und da ihre Summe gleich Null ist, so kommt man auf den bemerkenswerthen Schluss, dass die Grössen ζ und ζ' in gleicher Anzahl vorhanden sind. Bezeichnen wir nun diese Anzahl mit n, so hat man:

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}=C+\frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)}+\frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)}+\ldots+\frac{H'(z-\zeta_n)}{H(z-\zeta_n)}$$
$$-\frac{H'(z-\zeta'_1)}{H(z-\zeta'_1)}-\frac{H'(z-\zeta'_2)}{H(z-\zeta'_2)}-\ldots-\frac{H'(z-\zeta'_n)}{H(z-\zeta'_n)}.$$

Hieraus folgt, wenn man unter A eine beliebige Constante versteht:

$$\Phi(z)=A\,e^{Cz}\,\frac{H(z-\zeta_1)\,H(z-\zeta_2)\,\ldots\,H(z-\zeta_n)}{H(z-\zeta'_1)\,H(z-\zeta'_2)\,\ldots\,H(z-\zeta'_n)},$$

ein Ausdruck, der die Grössen 2 K und 2 i K' als Perioden haben muss. — Benutzt man aber die Beziehungen:

$$H(x + 2K) = -H(x),$$

$$H(x + 2iK') = H(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x + iK')}$$

und bezeichnet die Summe der Wurzeln ζ mit $\Sigma\zeta$, die Summe der Wurzeln ζ' mit $\Sigma\zeta'$, so findet man:

$$\Phi(z + 2K) = \Phi(z)\, e^{2KC},$$

$$\Phi(z + 2iK') = \Phi(z)\, e^{2iK'C + \frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta - \frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta'},$$

so dass sein muss:

$$e^{2KC} = 1,$$

$$e^{2iK'C + \frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta - \frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta'} = 1,$$

und diese Bedingungen geben, wenn man unter α und β beliebige ganze Zahlen versteht:

$$C = -\frac{i\pi}{K}\beta,$$

$$\Sigma\zeta - \Sigma\zeta' = 2\alpha K + 2\beta iK'.$$

Man beachte diese merkwürdige Beziehung zwischen den Wurzeln der Gleichungen:

$$\Phi(z) = 0, \quad \frac{1}{\Phi(z)} = 0,$$

die von Liouville entdeckt worden ist. Was die ganzen Zahlen α und β anbetrifft, die darin vorkommen, so fügen wir nur noch hinzu, dass sie sich unmittelbar auf die Funktion $\Phi(z)$ selbst mittelst der folgenden Gleichung beziehen:

$$\int_0^1 \frac{\Phi'(p + 2iK't)}{\Phi(p + 2iK't)}\, dt - \int_0^1 \frac{\Phi'(p + 2Kt)}{\Phi(p + 2Kt)}\, dt = \frac{\pi}{2KK'}(\alpha K + \beta iK').$$

Hieraus ergeben sich nachstehende Folgerungen. Es ist:

$$H(z + \Sigma\zeta) = H(z + \Sigma\zeta' + 2\alpha K + 2\beta iK')$$

und daher:

$$H(z + \Sigma\zeta) = (-1)^{\alpha+\beta} H(z + \Sigma\zeta')\, e^{-\frac{i\pi}{K}(\beta z + \beta^2 iK')},$$

was man auch schreiben kann:

$$(-1)^{\alpha+\beta}\, q^{\beta^2} \frac{H(z+\Sigma\zeta)}{H(z+\Sigma\zeta')} = e^{-\frac{i\pi}{K}\beta z}.$$

Vertauscht man nun den Exponentialfaktor $e^{Cz} = e^{-\frac{i\pi}{K}\beta z}$, welcher in der Entwickelung von Φ (z) vorkommt, mit diesem Quotienten zweier Funktionen H und setzt:

$$(-1)^{\alpha+\beta}\, q^{\beta^2} A = a,$$

so ist:

$$\Phi(z) = a\, \frac{H(z-\zeta_1)\, H(z-\zeta_2) \ldots H(z+\Sigma\zeta)}{H(z-\zeta'_1)\, H(z-\zeta'_2) \ldots H(z+\Sigma\zeta')}.$$

Man erkennt aber im Zähler und Nenner von Φ (z) die Ausdrücke wieder, welche wir schon angewandt haben, indem wir den Abelschen Satz von der Addition der Argumente bewiesen. Ist z. B. die Anzahl der n ungrade, so ist der Ausdruck:

$$\frac{H(z-\zeta_1)\, H(z-\zeta_2) \ldots H(z+\Sigma\zeta)}{\theta^{n+1}(z)}$$

derselbe, als der, welchen wir Seite 60 betrachtet haben und den man folgendermassen ausdrücken kann:

$$\varphi(z) = F(x^2) + \frac{dx}{dz}\, x\, F_1(x^2),$$

wo F (x) und F_1 (x) ganze Polynome vom Grade $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-3}{2}$ bezeichnen und x gleich sin am z, cos am z oder Δ am z genommen werden kann. Ist n grade, so ist der Ausdruck derselbe, als der, welcher Seite 61 mit φ_1 (x) bezeichnet wurde, und man hat dann, wenn man unter F (x) und f (x) ganze Polynome von x, bezüglich von den Graden $\frac{n}{2}$ und $\frac{n-2}{2}$ versteht:

$$\frac{H(z-\zeta_1)\, H(z-\zeta_2) \ldots H(z+\Sigma\zeta)}{\theta^{n+1}(z)}$$

$$= \sin am\, z\; F(\sin^2 am\, z) + \frac{d \sin am\, z}{dz}\, f(\sin^2 am\, z).$$

Man sieht also, dass Φ (z) durch den Quotienten zweier Ausdrücke von der angegebenen Art bestimmt ist; gerade aber in der Reduction einer doppelt periodischen Funktion auf sin am z und seine Ableitung besteht die Aufgabe, mit der wir uns hier zu beschäftigen hatten.

Der Beweis, den wir so eben gegeben haben, beruht gänzlich auf dem allgemeinen Ausdruck einer doppelt periodischen Funktion, den wir vorhin gefunden hatten, nämlich:

$$F(x) = C + R_1 \frac{H'(x-\zeta_1)}{H(x-\zeta_1)} + R_2 \frac{H'(x-\zeta_2)}{H(x-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{H'(x-\zeta_\mu)}{H(x-\zeta_\mu)}.$$

Wir wollen noch einen Weg angeben, unmittelbar dazu zu gelangen, indem man von der Gleichung ausgeht:

$$a\int_0^1 f(p+at)\,dt + b\int_0^1 f(p+a+bt)\,dt - a\int_0^1 f(p+b+at)\,dt$$
$$- b\int_0^1 f(p+bt)\,dt = 2i\pi\Delta.$$

Sei wie oben $a = 2K$, $b = 2iK'$ und setzen wir:

$$f(z) = F(z) \frac{H'(x-z)}{H(x-z)},$$

so ergiebt sich aus der Definition der Funktion $H(z)$:

$$\frac{H'(z+2K)}{H(z+2K)} = \frac{H'(z)}{H(z)},$$
$$\frac{H'(z-2iK')}{H(z-2iK')} = -\frac{H'(z)}{H(z)} + \frac{i\pi}{K},$$

und hieraus folgt:

$$f(z+2K) = f(z),$$
$$f(z+2iK') = fz + \frac{i\pi}{K} F(z),$$

so dass die vorstehende Gleichung sich reducirt auf:

$$\int_0^1 F(p+2Kt)\,dt = -\Delta;$$

aber die verschiedenen Residuen, welche in Δ enthalten sind, beziehen sich einerseits auf $z = \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\mu$ und andererseits auf $z = x$. Die ersteren, wenn sie, wie wir annahmen, einfachen Wurzeln entsprechen, geben als Summe:

$$R_1 \frac{H'(x-\zeta_1)}{H(x-\zeta_1)} + R_2 \frac{H'(x-\zeta_2)}{H(x-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{H'(x-\zeta_\mu)}{H(x-\zeta_\mu)},$$

und das auf $z = x$ bezügliche Residuum, welches eine einfache Wurzel von $H(x-z) = 0$ ist, wird offenbar $-F(x)$ sein. Der hieraus sich ergebende Ausdruck für $\varDelta$ giebt unmittelbar die Gleichung:

$$F(x) = \int_0^1 F(p+2kt)\,dt + R_1 \frac{H'(x-\zeta_1)}{H(x-\zeta_1)} + R_2 \frac{H'(x-\zeta_2)}{H(x-\zeta_2)} + \dots$$
$$+ R_\mu \frac{H'(x-\zeta_\mu)}{H(x-\zeta_\mu)}.$$

Wir fügen in Bezug auf diese Formel, die wir abgekürzt schreiben:

$$F(x) = C + \Sigma R \frac{H'(x-\zeta)}{H(x-\zeta)},$$

noch eine Bemerkung hinzu. Wenn man das Additionstheorem für die Argumente der Funktion zweiter Gattung*) anwendet, findet man leicht die Beziehung:

$$\frac{H'(x-\zeta)}{H(x-\zeta)} = \frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{H'(\zeta)}{H(\zeta)} - \cot \operatorname{am} x \, \varDelta \operatorname{am} x + \frac{\sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am} (x-\zeta)}.$$

Hieraus folgt, wenn man in den Ausdruck von $F(x)$ einsetzt und die Gleichnng:

$$\Sigma R = 0$$

berücksichtigt, die neue Formel:

$$F(x) = C - \Sigma R \frac{H'(\zeta)}{H(\zeta)} + \sum \frac{R \sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am} (x-\zeta)}$$

oder:

$$F(x) = \text{const} + \sum \frac{R \sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am} (x-\zeta)}.$$

Dies ist ebenfalls eine Reduktion der doppelt periodischen Funktion auf sin am x und seine Ableitung. Aber die schnellere

---

*) In $Z(x)$ kommt eigentlich die Grösse $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ vor, statt ihrer kann man indess $\frac{H'(x)}{H(x)}$ setzen, vermittelst der Gleichung $\sin \operatorname{am} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}$, welche, wenn man die logarithmischen Ableitungen beider Glieder nimmt, giebt: $\frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \operatorname{cotg} \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x.$

Methode, der wir hier gefolgt sind, giebt nicht, wie die vorhergehende, die wichtige und unerlässliche Beziehung:

$$\Sigma \zeta - \Sigma \zeta' = 2(\alpha K + \beta i K').$$

Diese neue Formel ergiebt sich übrigens unmittelbar allein aus der Bedingung:

$$\Sigma R = 0,$$

wie wir gleich sehen werden. Betrachten wir nämlich die Funktion:

$$f(z) = \frac{F(z)}{\sin am(z) \sin am(x-z)},$$

deren Perioden 2 K und 2 i K' sind. Ihre Residuensumme umfasst einerseits diejenigen, welche sich auf die Wurzeln ζ der Gleichung:

$$\frac{1}{F(x)} = 0$$

beziehen, diese sind:

$$\sum \frac{R}{\sin am\, \zeta \sin am(x-\zeta)},$$

und andererseits diejenigen Residuen, welche sich aus den beiden Gleichungen:

$$\sin am\, z = 0, \quad \sin am(x-z) = 0$$

ergeben. Innerhalb der Perioden 2 K und 2 i K' hat man indess nur die Wurzeln $z = 0$, $z = x$, welchen die Residuen $\frac{F(0)}{\sin am\, x}$, $-\frac{F(x)}{\sin am\, x}$ entsprechen. Man hat folglich:

$$\sum \frac{R}{\sin am\, \zeta \sin am(x-\zeta)} + \frac{F(0)}{\sin am\, x} - \frac{F(x)}{\sin am\, x} = 0,$$

und daher:

$$F(x) = F(0) + \sum \frac{R \sin am\, x}{\sin am\, \zeta \sin am(x-\zeta)}.$$

Auf ganz ähnliche Weise findet man für eine Funktion $\mathfrak{F}(x)$, welche den Bedingungen genügt:

$$\mathfrak{F}(x + 2K) = -\mathfrak{F}(x),$$
$$\mathfrak{F}(x + 2iK') = \mathfrak{F}(x),$$

den einfachen Ausdruck:

$$\mathfrak{F}(x) = \sum \frac{R}{\sin am (x - \zeta)},$$

worin nur die Wurzeln ζ vorkommen, die innerhalb $2K$ und $2iK'$ enthalten und durch die Formel:

$$\zeta = p + 2Kt + 2iK'u,$$

wo t und u kleiner als Eins, gegeben sind.

Hiermit brechen wir ab, indem wir glauben, ziemlich vollständig die elementaren Theile der Theorie der elliptischen Funktionen erschöpft zu haben, welche der Lehre von der Transformation vorausgehen.

ANHANG.

A. Ueber Funktionen von einer complexen Variablen und über die Mehrdeutigkeit der Integrale.

I. Geometrische Darstellung des Imaginären.

In verschiedenen Abschnitten dieses Buches, z. B. in D.II. und D.III. ist auf die Cauchy'sche Theorie des Imaginären und auf damit in Zusammenhang stehende Gegenstände, so in H.IV. auf die Residuenrechnung, Bezug genommen. Der Uebersetzer hält es daher für angemessen, diese wichtige Theorie, die jetzt auch bei elementaren Betrachtungen unentbehrlich zu werden beginnt, mit kurzen Worten zu geben, um so mehr, als die Elementarbücher nur selten hierauf Rücksicht zu nehmen pflegen. —

Denke man sich zunächst eine grade Linie, nach beiden Seiten in's Unendliche gehend, auf derselben einen beliebig angenommenen Punkt O und eine Strecke, die man als Einheit betrachtet; sei ferner diejenige der beiden Richtungen festgestellt, die als positiv betrachtet werden soll, so kann man, von O beginnend, immer ein Stück OA, aber nur eins abmessen, welches einer beliebig gegebenen reellen Grösse z entspricht, und man kann sagen, dass jedem positiven oder negativen Werthe von z ein Punkt A auf unserer Linie entspricht. — Ist aber $z = x + yi$ eine complexe Zahl, so hört diese Veranschaulichung auf; geht man indess, statt von einer Linie, nach Gauss's und Cauchy's Vorgange von einer Ebene aus, so kann man auch hier geometrische Betrachtungen anwenden. Man nimmt nämlich auf dieser unendlich gedachten Ebene zwei auf einander rechtwinkelige Axen beliebig an, bestimmt wie oben eine beliebige Strecke als Einheit, so wie die positive Richtung der Ordinaten und Abscissen; es können dann die beiden reellen Grössen x und y immer als Abscisse und Ordinate eines Punktes A in der Ebene betrachtet werden, und es wird somit jedem Werthe von $z = x + yi$ ein solcher Punkt, und zwar nur einer

in der Ebene, entsprechen. Aus diesem Grunde kann man auch sagen, der Punkt A habe den Werth $x + yi$, wo unter dem reellen und imaginären Theil bezüglich immer Ordinate und Abscisse verstanden sind. Alle Punkte auf der Abscissenaxe haben dann reelle, alle auf der Ordinatenaxe rein imaginäre Werthe. Den Ausdruck $z = x + yi$ kann man noch auf eine andere Art geometrisch bestimmen als durch Ordinate und Abscisse. Setzt man nämlich:

$$x = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi,$$

d. h. führt man Polarcoordinaten ein, so ist:

$$z = r e^{\varphi i}.$$

Der Modul von z stellt also die Entfernung des entsprechenden Punktes A vom Anfangspunkte der Coordinaten, der Winkel φ die Lage dieser Entfernung zur Abscissenaxe dar. Es ist ferner klar, dass man von einem Werth von z: a, zu einem andern b auf unendlich viel Weisen in continuirlicher Art übergehen kann, dass aber nur ein Weg eine grade Linie bildet. Sind a und b reell, so ist diese grade Linie die Abscissenaxe, und dieser Weg ist der einzige, auf welchem während des ganzen Ueberganges von a zu b die Grösse z reell bleibt.

II. Ueber Funktionen von einer complexen Variablen.

Sei:

$$z = x + yi$$

und

$$u = f(z) = p + qi.$$

Damit die Funktion von z u vollständig definirt sei, muss zu jedem complexen Werthe von z, d. h. also zu jedem Punkte der unendlichen Ebene, ein bestimmter, nach irgend einem Gesetze sich ergebender complexer Werth von u gehören. Sollte dies Gesetz also derart sein, dass für jedes z sich zwei oder mehrere Werthe von u daraus ergeben, so muss in jedem Falle derjenige der Werthe, der zu nehmen ist, näher bestimmt werden. Wir unterscheiden demnach eindeutige und mehrdeutige Funktionen; $\sqrt[n]{z}$ ist z. B. eine mehrdeutige Funktion, da zu jedem z n Werthe der Wurzelgrösse gehören, während $az + b$ eine eindeutige Funktion ist. $u = f(z)$ wird sich im Allgemeinen mit z zugleich continuirlich ändern, nur in einzelnen Punkten kann hiervon eine Ausnahme stattfinden, insofern u

daselbst unendlich oder discontinuirlich wird*); dergleichen Punkte werden wir als Discontinuitäts-Punkte der Funktion u bezeichnen. Die Art und Weise, wo sich u mit z ändert, wird durch die Ableitung $\frac{du}{dz}$ angegeben. In Bezug auf dieselbe ist hier jedoch eine wichtige Bemerkung zu machen. Bekanntlich ist:

$$\frac{du}{dz} = \lim \frac{f(z+\alpha) - f(z)}{\alpha}$$

für verschwindendes α. Denken wir uns zunächst diese verschwindende Grösse α reell, so ist, wie die Anfangsgründe der Differenzialrechnung ergeben, die bezeichnete Grenze eine im Allgemeinen von α unabhängige neue Funktion von z, und nur für einzelne Punkte des Raumes kann diese Grösse von α abhängig und somit discontinuirlich werden. Gleiches findet statt, wenn man statt des reellen α eine rein imaginäre verschwindende Grösse βi setzt. Indess folgt nicht aus dem Begriffe der Funktion, dass die Ausdrücke:

$$\frac{f(z+\alpha) - f(z)}{\alpha}, \quad \frac{f(z+\beta i) - f(z)}{\beta i}$$

sich auch derselben Grenze nähern. Setzen wir demgemäss:

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = \lim \frac{f(z+\beta i) - f(z)}{\beta i}$$

und

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \lim \frac{f(z+\alpha+\beta i) - f(z)}{\alpha+\beta i},$$

wo der Zuwachs also complex ist, es ist dann offenbar auch:

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \lim \frac{f(z+\alpha+\beta i) - f(z+\alpha) + f(z+\alpha) - f(z)}{\alpha+\beta i}$$

$$= \frac{\alpha \frac{d f(z)}{dz} + \beta i \left(\frac{d f(z+\alpha)}{dz}\right)}{\alpha+\beta i},$$

oder wegen des verschwindend kleinen α:

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \frac{\frac{du}{dz} + \frac{\beta i}{\alpha}\left(\frac{du}{dz}\right)}{1 + \frac{\beta i}{\alpha}},$$

---

*) Die Frage, ob und wann Discontinuitäten von u längs ganzer Linien stattfinden, soll hier unerwogen bleiben.

mithin wäre die Ableitung von dem Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ des reellen und imaginären Theiles des Zuwachses, also von einer im Allgemeinen endlichen Grösse abhängig. Diese Abhängigkeit wird nur dann vermieden, wenn die Beschaffenheit der Funktion u es bedingt, dass

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)$$

ist; es wird dann nämlich sich unmittelbar ergeben:

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \frac{du}{dz},$$

dann ist also der Differenzialquotient ganz unabhängig von der Beschaffenheit des Zuwachses $\alpha + \beta i$, derselbe möge reell, rein imaginär oder complex sein. Funktionen, welche diese Eigenschaft für jeden Werth von z haben, nennt Cauchy monogen.

In den Elementen der Analysis wird dargethan, dass alle algebraischen Funktionen, so wie die Exponentialgrössen, Logarithmen und trigonometrischen Funktionen in der That monogen sind, und es zeigt sich leicht, dass alle Combinationen solcher Grössen, so wie die mittelst der Integralrechnung aus ihnen entstehenden Funktionen diese Eigenschaft beibehalten. Da wir es hier nun ausschliesslich mit solchen Funktionen zu thun haben, so nehmen wir für die in dem Folgenden zu betrachtenden Grössen ohne Weiteres an, dass dieselben monogen sind, also die Bedingungsgleichung $\left(\frac{du}{dz}\right) = \frac{du}{dz}$ erfüllen.

III. Eindeutige und mehrdeutige Funktionen.

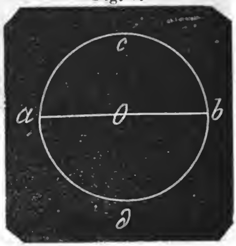
Ist die Funktion $u = f(z)$ eindeutig, und lässt man z von irgend einem Punkte a der Ebene zu einem andern b fortschreiten, so wird, welchen Weg man auch verfolge, die Funktion von dem Werthe f (a) zu dem Werthe f (b) übergehen, und ist dieser letztere immer derselbe, also von dem Wege ganz unabhängig, da ja wegen der Eindeutigkeit von u in Punkt b die Funktion nur den einen Werth f (b) annehmen kann.

Sei nun aber die Funktion u mehrdeutig; nehmen wir z. B. an, sie könnte für einen beliebigen Punkt z die Werthe $f_1(z)$ und $f_2(z)$ annehmen; es ist dann möglich, dass, wenn man auf zwei verschiedenen Wegen von a zu b übergeht, indem man mit demselben Werth von u für a, also z. B. mit $f_1(a)$ beginnt, man schliesslich

auf dem einen Wege den Werth $f_1(b)$, auf dem andern aber $f_2(b)$ erhält. Um dies an einem Beispiel klar zu machen, wollen wir die Funktion $u = \sqrt{z}$ betrachten, welche für jeden Punkt zwei einander numerisch gleiche, aber entgegengesetzte Werthe hat.

Beginnen wir mit einem Punkte der Abscissenaxe, der den reellen Werth a hat, mit dem positiven Werthe von $\sqrt{a}$ und gehen auf zwei Wegen zu Punkt $b = -a$ über. Diese beiden Wege sollen die vom Anfangspunkte der Coordinaten mit Halbmesser a gezogenen Halbkreise acb und adb sein. Führen wir Polarcoordinaten ein, so ist $r = a$, $u = +\sqrt{a e^{\varphi i}}$, der Winkel φ des Radius mit der Abscissenaxe ist für Halbkreis acb positiv, für adb negativ zu nehmen, für b wird also im ersten Falle $\varphi = +\pi$, im letztern $\varphi = -\pi$, und man erhält auf dem ersten Wege für $b = -a$:

Fig. I.



$$u = \sqrt{a e^{\pi i}} = i\sqrt{a},$$

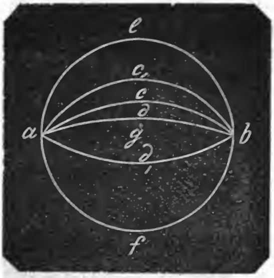
auf dem letztern:

$$u = \sqrt{a e^{-\pi i}} = -i\sqrt{a},$$

so dass man in der That auf beiden Wegen die beiden einander entgegengesetzten Werthe von u erhalten hat. Wir gehen jetzt auf die Umstände ein, unter welchen solch ein Wechsel der Werthe eintreten kann. Es sind hierbei diejenigen Punkte derselben in's Auge zu fassen, für welche zwei oder mehrere Werthe von u, also $f_1(z)$ und $f_2(z)$ einander gleich werden; dergleichen Punkte nennen wir „kritische Punkte."

Für $u = \sqrt{z}$ z. B. ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein kritischer Punkt, da für denselben $z = 0$, $+\sqrt{0} = -\sqrt{0}$ ist; für $u = \sqrt{\beta + z}$ ist $z = -\beta$ ein solcher. Untersuchen wir jetzt die Funktion $u = f(z)$, welche mehrdeutig ist, also z. B. die Werthe $f_1(z)$ und $f_2(z)$ annehmen kann, für zwei Wege acb und adb, die gemeinsame Endpunkte a und b haben (Fig. II.); nehmen wir zunächst an, diese Wege wichen nur unendlich wenig von einander ab, auf dem ganzen Umfange acbd und innerhalb desselben sei $f(z)$ continuirlich und es fände sich daselbst kein kritischer Punkt, so dass also für jeden Punkt auf diesem Umfange und innerhalb desselben die beiden Werthe $f_1(z)$ und $f_2(z)$ um eine endliche Grösse von einander verschieden sind. Fängt man in a mit $u = f_1(a)$

Fig. II.



an und verfolgt den Weg acb, so wird sich u continuirlich ändern und in jedem Punkte des Weges, z. B. c oder b, mit einem der beiden Werthe von f(z) anlangen, den wir als f_1 (c), f_1 (b) bezeichnen wollen. Verfolgt man nun mit demselben Anfangswerthe Weg adb, so wird, da die Funktion hier continuirlich ist, in keinem Punkte dieselbe einen Werth annehmen können, der von dem eines benachbarten Punktes des Weges acb um eine endliche Grösse verschieden ist. Ist also d unendlich nahe dem Punkte c, so wird u hier den Werth f_1 (d), nicht f_2 (d) annehmen, da der letztere Werth um eine endliche Grösse von f_1 (d), also auch von f_1 (c) abweicht; dasselbe gilt von jedem Punkte der Linie adb, es wird also auf diesem Wege die Funktion denselben Werth erhalten, als auf dem ersten. Man sieht nun, dass man den Raum von acb bis aeb in unendlich kleine Räume theilen kann, deren Grenzlinien ac,b u. s. w. alle durch a und b gehen. Auf allen diesen Wegen, schliesslich also auf Weg aeb wird f (b) denselben Werth erhalten, wenn man von a mit einem bestimmten Werthe ausgeht, falls sich in und auf dem Umfange adbe kein kritischer oder Discontinuitätspunkt befindet; Aehnliches gilt für die Strecke afb, welche auf eben die Weise durch continuirliche Uebergänge ad,b u. s. w. aus adb entsteht. Damit also auf zwei beliebigen Wegen aeb und afb in b die Funktion denselben Werth erhält, vorausgesetzt, dass man in a von demselben Werthe ausgegangen ist, reicht es hin, dass innerhalb und auf aebf kein kritischer oder Discontinuitätspunkt liege, wie auch dieser Umfang beschaffen sei. Was die Discontinuitätspunkte anbetrifft, so kommen hier diejenigen nicht in Betracht, wo $u = f(z)$ unendlich ist und nicht für einen unendlich kleinen Zuwachs von z in's Endliche überspringt, wo also die Discontinuität darin besteht, dass $u = f(z)$ positiv, $u = f(z + \nu)$ negativ unendlich ist, wie z. B. tg z für $z = \frac{\pi}{2}$. Denn auf solchen betrachtet man die Funktion $v = \frac{1}{f(z)}$, welche daselbst Null wird, also continuirlich bleibt. Es kann also auch selbst dann auf den Wegen aeb und afb die Funktion f_1 (z) nicht in f_2 (z) übergehen, wenn in oder auf dem Umfange f (z) unendlich werden sollte.

Solche Discontinuitätspunkte wollen wir als von erster Klasse bezeichnen. Finden dagegen Discontinuitäten statt, wo f(z) von einem endlichen Werthe zu einem andern, oder von einem unendlichen zu einem endlichen Werthe überspringt, so könnte ein solcher Wechsel stattfinden. Wir bezeichnen solche Discontinuitätspunkte als von zweiter Klasse. Ein Beispiel eines Discontinuitätspunktes zweiter Klasse bietet z. B. die eindeutige Funktion $a + (b - a)\, e^{-e^{\frac{1}{x-\alpha}}}$ dar, welche für $x = \alpha + \nu$ den Werth a, für $x = \alpha - \nu$ den Werth b annimmt, wo ν eine positive unendlich kleine Grösse ist. Mögen nun zwischen ad_1b und adb sich ein oder mehrere kritische Punkte befinden, also z. B. in g $f_1(g) = f_2(g)$ werden, so sieht man ein, dass in den benachbarten Punkten d und d_1 die Funktionen $f_1(d)$ und $f_2(d_1)$ nur unendlich wenig von einander abweichen, also ein Uebergang eintreten kann; es ist also möglich, dass auf Weg adb die Funktion in b mit Werth $f_1(b)$ anlangt, während sie auf Weg ad_1b mit $f_2(b)$ angekommen ist. Ist dies der Fall und befinden sich dann innerhalb und auf aefb keine kritischen Punkte mehr, so sieht man nach dem Vorigen, dass auch auf den Wegen aeb und afb die Funktion in b mit verschiedenen Werthen anlangt. Gleiches gilt von den Discontinuitätspunkten zweiter Klasse. Diejenigen kritischen Punkte, welche etwa auf dem Umfange liegen, kommen nicht weiter in Betracht, da man in diesem Falle einen unendlich nahen, von solchen Punkten freien Umfang betrachten kann, und wir haben daher folgenden Satz:

„Geht man von a mit dem Anfangswerth $u = f_1(a)$ auf zwei Wegen nach b, so können nur dann für b sich verschiedene Werthe von f(z) ergeben, wenn innerhalb des von beiden Wegen begrenzten Raumes sich kritische oder Discontinuitätspunkte zweiter Klasse finden. Selbstverständlich aber ist durch das Vorhandensein solcher Punkte ein solcher Wechsel nur möglich, nicht geboten."

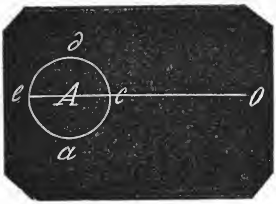
Wir sehen also, dass in Räumen, wo dergleichen Punkte sich nicht befinden, die Funktion $u = f(z)$ in der That eindeutig ist, und die Mehrdeutigkeit derselben nur von gewissen einzelnen Punkten herrührt; es wird also im Folgenden von Räumen, in welchen gegebene Funktionen eindeutig sind, die Rede sein können. —

Setzen wir jetzt voraus, dass die Wege aeb und afb in der That in b zwei verschiedene Werthe von f(b) ergeben, und beschrieben den ganzen Umfang in Richtung beafb, von $u = f_1(b)$ ausgehend; man wird dann auf dem Wege bea in a mit $u = f_1(a)$ anlangen, da der Weg aeb von $f_1(a)$ zu $f_1(b)$ führte, auf Weg afb gelangt man dagegen, wie oben gesehen, von $f_1(a)$ zu $f_2(b)$;

indem man also den Umfang b e a f b, in dem sich kritische Punkte befinden, beschreibt, gelangt die Funktion mit einem andern Werthe als dem ursprünglichen zu ihrem Anfangspunkte zurück, was unmöglich ist, wenn dergleichen Punkte (oder Discontinuitätspunkte punkte zweiter Klasse) in dem umschriebenen Raume nicht vorhanden sind.

Aus diesem Umkreisen von Räumen, welche kritische Punkte enthalten, kann man die Mehrdeutigkeit der Funktionen entstanden denken, Sei z. B. $u = \sqrt{1 + z}$. In dieser Funktion ergiebt sich für $z = -1$ ein kritischer Punkt, sei A derselbe, also $0A = -1$;

Fig. III.



beschreiben wir um A einen Kreis mit Radius $Ac = m$, so ist in jedem Punkte der Peripherie $x = -1 + m \cos\varphi$, $y = m \sin\varphi$, $z = -1 + m e^{\varphi i}$, wo φ von 0 bis 2π fortschreitet, während der ganze Kreis c d e a c zurückgelegt wird. Also dem Punkte c entsprechen die Werthe $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, dieselben in $u = \sqrt{1+z}$ eingesetzt, geben bezüglich $u = \sqrt{m}$ und $u = \sqrt{m e^{2\pi i}} = e^{\pi i}\sqrt{m} = -\sqrt{m}$, fängt man also in c, während man den Kreis zurücklegt, mit dem positiven Wurzelwerth an, so kommt man, nachdem der Kreis beschrieben ist, mit dem negativen Wurzelwerth wieder nach c zurück. Bei einem nochmaligen Umkreisen wird der positive Werth wieder hergestellt. Es ist klar, dass z. B. die Funktion $\sqrt[n]{(1+z)}$ erst nach nmaligem Umkreisen des kritischen Punktes auf ihren Anfangswerth zurückkommt.

Betrachten wir ferner die Funktion $u = \lg(1+z)$. Da dieselbe für $z = -1$ unendlich wird, so betrachten wir $v = \frac{1}{\lg(1+z)}$, welche für $z = -1$ Null wird, und es ist klar, dass der unendlich vieldeutige Ausdruck $\frac{1}{\lg(1+z) + 2s\pi i}$ für diesen Punkt lauter gleiche Werthe, nämlich Null annimmt; es ist also $z = -1$ ein kritischer Punkt. Beschreiben wir wie oben den Kreis mit Mittelpunkt A und Radius m, so ist $u = \lg(1+z) = \lg(m e^{\varphi i})$, also für c zu Anfang und nach Zurücklegung des Kreises bezüglich $u = \lg m$ und $u = \lg(m) + 2\pi i$, nach jedesmaligem Umkreisen des Punktes A wird dieser Ausdruck um $2\pi i$ vermehrt, nimmt man die Richtung des Umkreisens entgegengesetzt, so erhält $2\pi i$ das Minuszeichen.

So entstehen alle Werthe von lg(1+z). — Dies sind die Elemente der Theorie der Mehrdeutigkeit monogener Funktionen. Weiteres darüber, namentlich über die Art, wie in den verschiedenen Fällen die verschiedenen Werthe einer mehrdeutigen Grösse einander ersetzen, besonders in Bezug auf die Wurzeln algebraischer Gleichungen, enthält die auch im Buche citirte Abhandlung von Puiseux.

IV. Mehrdeutigkeit der Integrale.

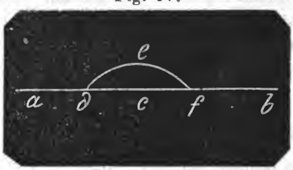
Die Definition eines bestimmten Integrals ist durch die Formel:

$$\int_a^b f(z)\,dz = \lim \left[\frac{1}{n} \sum f(z_p)\right]$$

gegeben, für den Fall, wo n, welche Zahl die Anzahl der Elemente z_p andeutet, unendlich wird. Diese Elemente z_p sind den Bedingungen unterworfen, dass jedes aus dem Vorhergehenden auf continuirliche Weise entsteht, dass a das erste und b das letzte ist; dass ferner für auf einander folgende Werthe von z_p sich auch $f(z_p)$ nur continuirlich ändert; diese letztere wichtige Bedingung findet darum statt, weil bei discontinuirlicher Aenderung die bekannten Gesetze des Differenziirens und Integrirens nicht mehr richtig sind. Es folgt hieraus, dass das Integral $\int_a^b f(z)\,dz$ über jede Linie sich erstrecken kann, deren Endpunkte a und b sind; es giebt daher unendlich viel solcher Integrale und alle diese würden verschiedene Werthe haben, wenn nicht die Monogenität der Funktion f (z) hier Beschränkungen eintreten liesse, von denen sogleich die Rede sein wird.

Sind a und b reell, so kann man das Integral auf der Abscissenaxe nehmen, falls zwischen a und b kein Discontinuitätspunkt stattfindet, und dies ist die in den Elementen gewöhnliche Art der Bestimmung der Integrale. Findet aber ein solcher Discontinuitätspunkt z. B. in c statt, so kann er mittelst eines beliebig klein zu denkenden Bogens d e f umgangen werden, es ist dann das Integral auf den Weg a d e f b auszudehnen, und für diesen Bogen wird das Element imaginär. Dies erklärt es, dass Integrale zwischen reellen Grenzen selbst dann noch continuirliche Werthe ergeben,

Fig. IV.



wenn zwischen diesen Grenzen das Element unendlich gross wird. So ist:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lg b - \lg a.$$

Ist $a = -b$, so erhält man:

$$\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{x} = -\lg(-1),$$

obgleich für $x = 0$, also zwischen $-b$ und $+b$ Discontinuität stattfindet; man muss sich nämlich den Anfangspunkt der Coordinaten durch etwa einen Halbkreis, der denselben zum Mittelpunkt hat, umgangen denken, wo dann keine Discontinuität stattfindet. Diese Bemerkung ist als eine nothwendige Ergänzung der Elemente der Integralrechnung zu betrachten und zum vollständigen Verständniss derselben erforderlich. — Ist $b = a$, so ist das Integral auf einer geschlossenen, im Uebrigen aber beliebigen Linie genommen, als z. B. auf einem Kreise oder auf dem Umfange eines Rechtecks u. s. w. Uebrigens folgt aus den Elementen, dass ein Integral auf einem beliebigen Wege von a nach b genommen, den entgegengesetzten Werth hat, als das auf demselben Wege von b nach a genommene Integral, falls man nur im letzten Falle mit dem Werthe von $f(b)$ beginnt, mit dem man im ersten aufhörte.

Was nun den Wechsel der Werthe eines bestimmten Integrals anbetrifft, so gilt folgender Hauptsatz für alle monogenen Funktionen:

Erstreckt man ein bestimmtes Integral in den Grenzen a und b auf zwei durch a und b gehende Linien, auf denen und zwischen denen die Funktion eindeutig ist und sich kein Discontinuitätspunkt befindet, so sind beide bestimmte Integrale gleich.

Wir beweisen diesen Satz zunächst für zwei einander unendlich nahe Linien acb und adb. Sei $\int_a^b f(z)\,dz$ das auf die erste Linie bezogene Integral, so kann, da von dem auf adb bezogenen jedes Element z und $f(z)$ sich nur unendlich wenig von den entsprechenden Elementen eines Punktes der Linie acb unterscheidet, das letztere Integral gleich

$$\int_a^b f(z)\,dz + \delta \int_a^b f(z)\,dz$$

gesetzt werden, wo das Variationszeichen δ den Uebergang der Linie acb zur Linie adb darstellt. Nach den Gesetzen der Variationsrechnung ist aber

$$\delta \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b [f(z)\,d\delta z + \delta f z\,dz].$$

Man hat aber:

$$\int_a^b f(z)\, d\delta z = f(b)\,\delta b - f(a)\,\delta a - \int_a^b d\, f(z)\, \delta z.$$

Da an den Grenzen a und b beide Wege zusammentreffen, ist aber

$$\delta b = \delta a = 0$$

und daher:

$$\delta \int_a^b f(z)\, dz = \int_a^b [\delta f(z)\, dz - d\, f(z)\, \delta z].$$

Da f(z) eine monogene Funktion, folglich

$$\frac{\delta f(z)}{\delta z} = \frac{d f(z)}{dz}$$

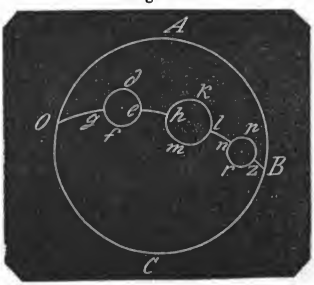
ist, welches auch die Beschaffenheit des Zuwachses sei, so ist dieser Ausdruck gleich Null und folglich der Werth von $\int_a^b f(z)\, dz$ für beide Werthe gleich. Was hier für zwei unendlich nahe Integrationswege bewiesen wurde, gilt für beliebige, da von jedem zu einem nächsten und so bis zu einem beliebigen übergegangen werden kann, und die Variation verschwindet, falls sich innerhalb des ganzen durchmessenen Raumes kein Discontinuitätspunkt befindet.

Dieser Satz ist identisch mit dem folgenden.

Satz I. „Befindet sich innerhalb eines geschlossenen Umfangs OABCO (Fig. V.) und auf demselben kein kritischer oder Discontinuitätspunkt, so ist das über diesen Umfang erstreckte Integral gleich Null."

In der That sind die Integrale für die Wege OAB und OCB gleich; setzt man für das letztere das auf Weg BCO bezogene Integral mit umgekehrtem Vorzeichen, so ist die Summe der auf OAB und BCO, d. h. auf OABCO bezogenen Integrale in der That Null. — Aus unserem Satz ergiebt sich aber noch der folgende allgemeinere.

Fig. V.



Satz II. „Betrachten wir einen von mehreren geschlossenen Linien begrenzten Raum, z. B. den zwischen OABCO, gdefg, hklmh, npzrn liegenden, und sei innerhalb dieses mehrfach begrenzten Raumes, wo jedenfalls eine (die äussere) Begrenzung die übrigen ein-

schliessen wird, die Funktion stets eindeutig und continuirlich, so ist das auf die äussere Begrenzung bezogene Integral gleich der Summe der auf die innern Begrenzungen bezogenen, wenn alle Begrenzungen in derselben Richtung zurückgelegt werden."

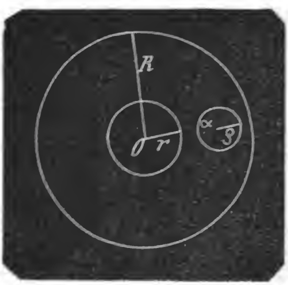
Es ist nämlich das über OAB erstreckte Integral gleich dem über OgdehklnpzB erstreckten, da beide Begrenzungen keinen Discontinuitätspunkt einschliessen; ebenso ist das über BCO erstreckte Integral gleich dem über BzrnlmhefgO erstreckten, also das ganze über OABCO erstreckte dem über OgdehklnpzBzrnlmhefgO erstreckten gleich; vom letztern aber heben sich, da die Funktion in dem betrachteten Raume eindeutig ist, die entgegengesetzten Strechen: Og, gO — eh, he — ln, nl — zB, Bz weg, und es bleiben die Integrale über gdef, hklm, npzr übrig.

Ist eine Funktion innerhalb eines irgend wie begrenzten Raumes eindeutig, aber nicht continuirlich, so findet der letztere Satz noch immer statt, wenn man die Discontinuitätspunkte als Mittelpunkte unendlich kleiner Kreise betrachtet und die Peripherien der letzteren in die inneren Begrenzungen mit aufnimmt, denn in den übrigen Räumen ist dann die Funktion continuirlich. — Ist der Raum, in welchem die Funktion eindeutig und continuirlich ist, der von zwei geschlossenen Umfängen begrenzte Ring, so ist das Integral auf die eine Grenzcurve ausgedehnt, dem auf die andere ausgedehnten gleich.

V. Entwickelung der Funktionen in Reihen.

Der Satz II. giebt unter Anderem das zur Entwickelung der Funktionen in Reihen nach positiven und negativen Potenzen der Variablen, so wie nach Vielfachen der Sinus und Cosinus Nöthige.

Fig. VI.



Denken wir uns zunächst zwei um den Anfangspunkt der Coordinaten bezüglich mit den Radien R und r gezogene Kreise, wo $R > r$ ist, und nehmen wir an, dass auf deren Peripherien innerhalb des durch beide gebildeten Ringes die Funktion f (z) eindeutig und continuirlich sei; ist dann $z = \alpha$ ein im Ringe befindlicher Punkt, so wird auch die Funktion $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ innerhalb dieses Ringes,

jedoch mit Ausnahme des Punktes $z = \alpha$, für welchen sie unendlich gross ist, eindeutig und continuirlich sein. Umgiebt man also α mit einem unendlich kleinen Kreise, dessen Radius ρ ist, so wird das auf den Kreis mit Radius R bezogene Integral von $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ gleich dem auf die beiden Kreise mit Radien r und ρ bezogenen Integrale desselben Ausdrucks sein. Es ist nun für den ersten Kreis $z = R e^{\varphi i}$, für den zweiten $z = r e^{\varphi i}$, für den dritten $z = \alpha + \rho e^{\varphi i}$ zu setzen, also:

$$\text{A)} \quad i \int_0^{2\pi} \frac{f(R e^{\varphi i}) R e^{\varphi i} d\varphi}{R e^{\varphi i} - \alpha} = i \int_0^{2\pi} \frac{f(r e^{\varphi i}) r e^{\varphi i} d\varphi}{r e^{\varphi i} - \alpha} + i \int_0^{2\pi} f(\alpha + \rho e^{\varphi i}) d\varphi.$$

Beschäftigen wir uns zunächst mit dem letzten Integral. Es ist:

$$f(\alpha + \rho e^{\varphi i}) = f(\alpha) + F(\varphi),$$

wo

$$F(\varphi) = f(a + \rho e^{\varphi i}) - f(\alpha)$$

sein soll. Mithin unser Integral:

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha + \rho e^{\varphi i}) d\varphi = 2\pi f(\alpha) + \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi.$$

Sei L der grösste Werth, den $F(\varphi)$ annehmen kann, so ist:

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi < 2\pi L,$$

und da wegen der vorausgesetzten Continuität von $f(z)$ in dem bezeichneten Flächenraume $F(\varphi)$, also auch L unendlich klein ist, so hat man:

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha + \rho e^{\varphi i}) d\varphi = 2\pi f(\alpha).$$

In dem ersten Integrale ist der Modul von α immer kleiner als R und daher:

$$\frac{f(R e^{\varphi i}) R e^{\varphi i}}{R e^{\varphi i} - \alpha} = f(R e^{\varphi i}) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{R^n e^{n\varphi i}},$$

wo die unter dem Summenzeichen enthaltene Reihe jedenfalls convergirt. Im zweiten Integral ist der Modul von α grösser als r und deshalb:

$$\frac{f(re^{\varphi i})\,re^{\varphi i}}{re^{\varphi i}-\alpha} = -f(re^{\varphi i})\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{r^s e^{s\varphi i}}{\alpha^s},$$

wo die unendliche Reihe ebenfalls convergirt. Bemerken wir jedoch, dass nur dann, wenn α innerhalb des betrachteten Ringes liegt, bei beiden Reihen Convergenz stattfinden kann; für jeden Punkt α innerhalb des kleineren Kreises wird nämlich die erste, für jeden ausserhalb des grösseren die letzte Reihe divergiren. Die so gefundenen Werthe in unsere Formel eingesetzt, geben:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha^{-n}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})}{R^n e^{n\varphi i}}d\varphi = -\sum_{n=1}^{n=\infty}\alpha^{-n}\int_0^{2\pi}r^n e^{n\varphi i}f(re^{\varphi i})d\varphi + 2\pi f(\alpha)$$

oder:

$$1)\qquad f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\Big[\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha^n\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})\,d\varphi}{R^n e^{n\varphi i}} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\alpha^{-n}\int_0^{2\pi}r^n e^{n\varphi i}f(re^{\varphi i})\,d\varphi\Big],$$

d. h. $f(\alpha)$ ist immer in convergenter Reihe nach positiven und negativen Potenzen von α entwickelbar, so lange der Modul von α zwischen dem grössten und kleinsten Werthe derjenigen Moduln liegt, für welche die Funktion $f(z)$ immer eindeutig und continuirlich ist. Bleibt $f(z)$ von Modul Null an bis zu einem gewissen R eindeutig und continuirlich, so ist $r = 0$ zu setzen;

$$2)\quad f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\sum\alpha^n\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})\,d\varphi}{R^n e^{n\varphi i}}.$$

d. h. jede Funktion $f(\alpha)$, die für $\alpha = 0$ eindeutig und continuirlich ist, kann immer nach ganzen positiven Potenzen von α entwickelt werden, so lange der Modul von α kleiner als derjenige ist, für welchen $f(z)$ aufhört eindeutig und continuirlich zu sein. Findet aber die angegebene Bedingung nicht statt, so muss nothwendig die Reihe divergiren.

Aus den Elementen der Theorie der Reihen folgt, dass nur eine Entwickelung von $f(\alpha)$ nach ganzen positiven Potenzen von α möglich ist, es muss daher die entsprechende hier gegebene Entwickelung mit der Maklaurin'schen übereinstimmen, d. h. es ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(R\,e^{\varphi i})\,d\varphi}{R^n\,e^{n\varphi i}} = \frac{1}{1.2\ldots n}\,f^{(n)}_{(0)},$$

wo R jedoch innerhalb des Kreises liegen muss, für welchen f (z) eindeutig und continuirlich ist. Uebrigens ist klar, dass die beiden Integrale, welche in der Entwickelung 1) vorkommen:

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(R\,e^{\varphi i})\,d\varphi}{R^n\,e^{n\varphi i}},\quad \int_0^{2\pi} r^n\,e^{n\varphi i}\,f(r\,e^{\varphi i})\,d\varphi,$$

welche auch, wenn man wieder $r\,e^{\varphi i}$ und $R\,e^{\varphi i}$ gleich z setzt, geschrieben werden können:

$$\frac{1}{i}\int\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,\quad \frac{1}{i}\int z^{n-1}\,f(z)\,dz,$$

für jede geschlossene Curve gleichen Werth geben, die ganz innerhalb des bezeichneten Ringes, oder im Falle 2) innerhalb des Kreises enthalten ist, nur mit Ausnahme des Falles, wo $z = 0$ ist; denn in diesen Räumen sind $\frac{f(z)}{z^{n+1}}$, $z^{n-1}\,f(z)$ eindeutig und continuirlich. Es können also in 1) r und R durch jeden zwischen beiden liegenden reellen Werth, und in 2) R durch jeden positiven Werth, der kleiner als R ist, jedoch nicht durch Null ersetzt werden.

Die Reihe 1) enthält auch das zur Entwickelung nach Sinus und Cosinus der Vielfachen der Variablen Nöthige, so weit es sich auf complexe Funktionen bezieht. Sei nämlich:

$$\beta = e^{\frac{2\pi i\alpha}{\omega}},$$

also:

$$f(\alpha) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\lg\beta\right) = \Phi(\beta),$$

$f(\alpha)$ von $\alpha = 0$ an bis zu einem gewissen Modul eindeutig und continuirlich, so braucht deshalb im Allgemeinen nicht $\Phi(\beta)$ in dem bezeichneten Umfange diese Eigenschaften zu theilen. Denn ist $l(\beta)$ ein Werth von $\lg\beta$, so ist der allgemeine Werth dieser Grösse $l(\beta) + 2s\pi i$, also:

$$\Phi(\beta) = f\left[\frac{\omega}{2\pi i}\,l(\beta) + s\omega\right],$$

wo s eine beliebige ganze Zahl ist. Damit dieser Ausdruck eindeutig sei, muss für jeden Werth von α, $f(\alpha + \omega) = f(\alpha)$ sein, d. h. $f(\alpha)$ die Periode ω haben. Setzen wir dies voraus, so ist $\Phi(\beta) = f\left[\frac{\omega}{2\pi i}\,l(\beta)\right]$ in der That eindeutig und continuirlich, so

so lange es $f\alpha$ ist; möge nun dieser Ausdruck die bezeichneten Eigenschaften haben, so lange der Modul von α zwischen 0 und R liegt. Suchen wir die entsprechenden Moduln von β. Es war $\beta = e^{\frac{2\pi i\alpha}{\omega}}$, sei $\alpha = \rho e^{\varphi i}$, so ist

$$\beta = e^{-\frac{2\pi}{\omega}\rho\sin\varphi} e^{\frac{2\pi}{\omega}\rho i\cos\varphi}.$$

Der Modul von β ist also $e^{-\frac{2\pi}{\omega}\rho\sin\varphi}$, ein Ausdruck, der, wenn man φ veränderlich denkt, jeden Werth von $e^{-\frac{2\pi\rho}{\omega}}$ bi $e^{+\frac{2\pi\rho}{\omega}}$ annehmen kann. Den reellen Werthen von α entspricht immer $\sin\varphi = 0$, also der Modul 1 von β, da nun R der grösste Modul von α war, für welchen $f(\alpha)$ die verlangten Eigenschaften haben muss, so bleibt $\Phi(\beta)$ eindeutig und continuirlich, so lange sich β in einem Ringe befindet, der durch die Kreise mit Radien $e^{-\frac{2\pi R}{\omega}}$ und $e^{+\frac{2\pi R}{\omega}}$ begrenzt ist und man hat innerhalb dieses Ringes nach 1):

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_0^\infty \beta^n \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(re^{\varphi i})}{r^n e^{n\varphi i}} d\varphi + \sum_1^\infty \beta^{-n} \int_0^{2\pi} \Phi(re^{\varphi i}) r^n e^{n\varphi i} d\varphi,\right.$$

wo r irgend ein zwischen $e^{-\frac{2\pi R}{\omega}}$ und $e^{+\frac{2\pi R}{\omega}}$ liegender Werth ist, ein solcher ist z. B. $r = 1$; nimmt man diesen Werth, so wird, da $\Phi(\beta) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i} l\beta\right)$ war, $\Phi(e^{\varphi i}) = f\left(\frac{\omega\varphi}{2\pi}\right)$, wenn man also $\beta = e^{\frac{2\pi i\alpha}{\omega}}$ setzt:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\omega\varphi}{2\pi}\right) d\varphi\right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi\, f\left(\frac{\omega\varphi}{2\pi}\right)\left[e^{ni\left(\frac{2\pi\alpha}{\omega} - \varphi\right)} + e^{-ni\left(\frac{2\pi\alpha}{\omega} - \varphi\right)}\right],$$

oder wenn man $\frac{\omega\varphi}{2\pi} = \lambda$ setzt und statt der Exponentialgrössen trigonometrische einführt:

$$3) \qquad f(\alpha) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(\lambda)\, d\lambda \left[1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos \frac{2n\pi}{\omega}(\alpha - \lambda)\right].$$

Dies ist die Fourrier'sche Reihe in ihrer gewöhnlichen Form, sie gilt für alle Funktionen f (α), welche die Periode ω haben, so lange dieselben eindeutig und continuirlich sind. Ist α reell, so weiss man, dass die Gültigkeit der Reihe selbst durch Discontinuitäten nicht ausgeschlossen wird. Jedoch berührt dieser Fall unsere Betrachtungen nicht.

VI. Grundzüge der Residuenrechnung.

Im vorigen Abschnitt wurden wir auf Integrale geführt, die sich über Kreise mit unendlich kleinem Radius erstreckten, deren Mittelpunkt ein Discontinuitätspunkt war. Wir wollen jetzt solche Integrale berechnen, unter der Voraussetzung, dass in der Umgebung des Discontinuitätspunktes f (z) eindeutig sei. Für den bezeichneten Punkt sei $z = a$; es lassen sich dann von demselben aus zwei Kreise ziehen, von denen der Radius des einen beliebig klein, der andere so klein ist, dass er keinen zweiten Discontinuitätspunkt einschliesst, und innerhalb des so entstandenen Ringes wird sich die Funktion f (a + u), die in diesem Raume eindeutig und continuirlich ist, nach Formel 1) des vorigen Abschnittes entwickeln lassen, es ist also:

$$f(a+u) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n u^{-n}.$$

Es handelt sich nun um das Integral $\int f(a+v)\, dv$, auf einen Kreis mit unendlich kleinem Radius ausgedehnt. Wir können uns indess diesen Kreis immer als innerhalb des bezeichneten Ringes liegend denken, da der kleinere Radius desselben ja beliebig klein sein kann; setzt man somit $v = \rho e^{\varphi i}$, so ist das betrachtete Integral:

$$i\int_0^{2\pi} \rho e^{\varphi i} f(a+\rho e^{\varphi i})\, d\varphi = i\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} e^{(n+1)\varphi i}\, d\varphi$$

$$+ i\sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \int_0^{2\pi} \rho^{1-n} e^{(1-n)\varphi i}\, d\varphi.$$

Es werden nun bei der Integration alle Glieder dieser Summen gleich Null, mit Ausnahme desjenigen der zweiten Summe, welches $n = 1$ entspricht, dies ist nämlich $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$. Man hat also:

$$\int f(a + v)\, dv = 2\pi i B_1.$$

B_1 ist der Coefficient von $\frac{1}{v}$ in der Entwickelung von $f(a + v)$ nach negativen und positiven ganzen Potenzen von v. Diesen Entwickelungscoefficienten nennt Cauchy das Residuum von $f(a + v)$. Wir bezeichnen ihn durch das Symbol:

$$B_1 = \text{Res}\, f(a).$$

Es ist also das in dem bezeichneten unendlich kleinen Kreise um den Discontinuitätspunkt genommene Integral gleich dem entsprechenden Residuum, mit $2\pi i$ multiplicirt. Nach IV. dieses Anhanges ist also, wenn $f(z)$ innerhalb eines beliebigen Umfanges eindeutig, aber nicht continuirlich ist, also die Discontinuitätspunkte $a_1, a_2 \ldots a_n$ enthält:

$$\int f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{p=n} \text{Res}\, f(a_p),$$

wo das Integral sich über den ganzen Umfang erstreckt. Dieser Satz giebt, um ein Beispiel seiner reichen Anwendbarkeit anzuführen, das fruchtbarste bis jetzt bekannte Verfahren zur Berechnung bestimmter Integrale. Nehmen wir nämlich an, der bezeichnete Umfang sei ein Rechteck, dessen eine Seite ein Stück 2a der Abscissenaxe bilde, in dessen Mitte sich der Anfangspunkt O befinde, so ist, wenn man $z = x + yi$ setzt, das Integral zu nehmen für jede der vier Seiten, d. h. 1) x von $-a$ bis $+a$, $y = 0$; 2) $x = +a$, y von 0 bis $+b$; 3) x von $+a$ bis $-a$, $y = b$; 4) $x = -a$, y von b bis 0. Denkt man nun $a = b = \infty$ und nimmt an, dass $f(x+yi)$ für $x = \pm\infty$ und $y = +\infty$ verschwinde, so haben diejenigen drei Integrale, welche sich auf die nicht in die Abscissenaxe fallenden Seiten des Rechtecks beziehen, Null zum Argument, und das Integral ist nur auf der Abscissenaxe, also mit reeller Variable von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen, es ist also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz = 2\pi i \sum \text{Res}\, f(a_p),$$

wo die Summe die allen Discontinuitäten a, deren imaginärer Theil positiv ist, entsprechenden Residuen umfasst. Vorausgesetzt ist, dass die Funktion auf der Abscissenaxe selbst continuirlich ist. Da die

Residuensumme stets bekannt ist, so lässt sich also unter der gegebenen Bedingung, dass nämlich f (z) für jeden reellen oder imaginären unendlichen Werth verschwinde, das bestimmte Integral stets berechnen.

Eine andere Anwendung ist folgende. Bezeichnen wir die Entwickelungen von $f(\alpha)$ in Abschnitt V, 1) und 2) mit U und nehmen jetzt an, dass die Funktion innerhalb eines Kreises oder Ringes eindeutig, aber nicht mehr continuirlich ist, so kommt nach IV. in der Entwickelung des Integrales von $\frac{f(z)}{z-\alpha}$, welche V, A) gegeben wurde, noch ein Theil, der von den um die Discontinuitätspunkte gezogenen unendlich kleinen Kreisen herrührt, hinzu; dieser Theil ist $\sum \int \frac{f(a+h)\,dh}{a+h-\alpha}$, wo a den entsprechenden Discontinuitätspunkt bedeutet, das Integral auf den entsprechenden unendlich kleinen Kreis und das Summenzeichen auf alle im Ringe oder Kreise liegenden Discontinuitäten a von f (z) geht. Es ist aber:

$$\int \frac{f(a+h)\,dh}{a+h-\alpha} = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{f(a)}{a-\alpha}$$

und mithin geht die Entwickelung in V, 1) und 2) über in:

$$f(\alpha) = U + \sum \operatorname{Res} \frac{f(a)}{\alpha - a}.$$

U bezeichnet im Fall 1), wo die Eindeutigkeit innerhalb eines Ringes stattfand, eine nach positiven und negativen ganzen Potenzen von α fortschreitende, im Falle 2), wo sie in einem Kreise stattfindet, eine nur nach positiven Potenzen fortschreitende Reihe. Im letztern Falle enthält unsere Entwickelung die Zerlegung aller eindeutigen (algebraischen oder transcendenten) Funktionen in Partialbrüche. Was den Ausdruck $\operatorname{Res}\left(\frac{f(a)}{\alpha-a}\right)$ anbetrifft, so lässt sich um den Punkt a herum f (a + u), wie oben gesehen, in eine nach positiven und negativen Potenzen von u fortschreitende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n u^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n u^{-n}$$

entwickeln.

Da α ungleich a ist, kann u immer, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als $\alpha - a$ angenommen werden, und es ist:

$$\frac{1}{\alpha - a - u} = \frac{1}{\alpha - a} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{u^p}{(\alpha - a)^p},$$

also der in $\frac{f(a)}{\alpha - a}$ mit $\frac{1}{u}$ multiplicirte Theil:

$$\text{Res}\, \frac{f(a)}{\alpha - a} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(\alpha - a)^n}.$$

Findet in a eine Discontinuität erster Klasse statt (siehe III. des Anhangs), so beschränkt sich diese Summe jedoch auf eine endliche Anzahl Glieder. Es ist nämlich $f(a) = \infty$; $\frac{1}{f(a)} = 0$ wird dann continuirlich und es lässt sich für hinreichend kleines u $\frac{1}{f(a+u)}$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von u geordnete Reihe entwickeln. Sei:

$$\frac{1}{f(a+u)} = C_p\, u^p + C_{p+1}\, u^{p+1} + \ldots;$$

es verschwindet nämlich wegen $\frac{1}{f(a)} = 0$ jedenfalls das von u freie Glied der Entwickelung; es ist indess möglich, dass ausserdem noch eine beliebige Anzahl, also, wie hier angenommen wurde, $(p-1)$ Glieder verschwinden, natürlich kann p auch gleich Eins sein. Es ist dann $\lim \frac{1}{u^p f(a+u)} = C_p$ für die Grenze $u = 0$, und in diesem Falle nennt man den entsprechenden Punkt a eine Unendlichkeit p^{ter} Ordnung für $f(z)$. Die Funktion $u^p f(a+u) = \varphi u$ ist dann um $a = 0$ herum continuirlich und lässt sich nach ganzen positiven Potenzen entwickeln. Sei:

$$\varphi u = B_p + B_{p-1} u + \ldots + B_1 u^{p-1} + A_0 + A_1 u + \ldots,$$

so ist auch:

$$f(a+u) = \frac{B_p}{u^p} + \frac{B_{p-1}}{u^{p-1}} + \ldots + \frac{B_1}{u} + A_0 + A_1 u + \ldots,$$

also der negative Theil von $f(a+u)$ beschränkt sich auf p Glieder, und demzufolge ist:

$$\text{Res}\, \frac{f(a)}{\alpha - a} = \sum_{n=1}^{n=p} \frac{B_n}{(\alpha - a)^n}.$$

Wir müssen jedoch diese Entwickelungen, die sich noch sehr weit verfolgen liessen, hier abbrechen.*)

---

*) Der Vollständigkeit wegen erwähnen wir hier noch die Art, wie sich die Entwickelungen in V. und VI. in der Nähe eines kritischen Punktes modificiren. Möge f (x) für $x = A$ derart mehrdeutig sein, dass nach n Umkreisungen des Punktes A f (x) seinen anfänglichen Werth wieder erhält. Setzen wir $x = A + \varrho e^{\varphi i}$, so ist also:

$$f(A + \varrho) = f(A + \varrho e^{2n\pi i}). \qquad 1)$$

Es sei nun: $y = (x - A)^{\frac{1}{n}}$ und $f(x) = \varphi(y)$, so ist zunächst, so lange f (x) eine eindeutige Funktion von x ist, $\varphi(y)$ auch eine solche von y, da zu jedem y nur ein Werth von $x = A + y^n$ gehört. Setzt man wieder $x = A + \varrho e^{\varphi i}$, so wird $y = \varrho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi i}{n}}$; da ϱ positiv war, so kann auch $\varrho^{\frac{1}{n}}$ stets als positiv betrachtet werden. Gleichung 1) verwandelt sich in:

$$\varphi\left(\varrho^{\frac{1}{n}}\right) = \varphi\left(\varrho^{\frac{1}{n}} e^{2\pi i}\right),$$

$\varrho^{\frac{1}{n}}$ ist der Modul von y. Es kommt also $\varphi(y)$ schon nach einmaligem Umkreisen des Punktes A auf seinen früheren Werth zurück, ist mithin auch für A eindeutig. Es lässt sich also $\varphi(y) = f(x)$ nach ganzen positiven Potenzen von y oder $(x - A)^{\frac{1}{n}}$ entwickeln innerhalb eines um A gezogenen Kreises, in welchem sich ausser A keine kritischen und Discontinuitätspunkte befinden. Finden Discontinuitätspunkte statt, so ist die Residuensumme von $\varphi(y)$ für diese Punkte hinzuzufügen; ist der kritische Punkt A zugleich ein Discontinuitätspunkt, so findet sich in der Residuensumme das entsprechende, auf A bezügliche Glied:

$$\sum_{s=1}^{s=p} \frac{B_s}{(x-A)^{\frac{s}{n}}}.$$

B. Reduktion der Integrale algebraischer Funktionen, welche eine Quadratwurzel von einer ganzen Funktion vierten Grades enthalten, auf elliptische Integrale.

Diese elementare Betrachtung gehört zwar in die vom Verfasser übergangene Theorie der Transformation, sie ist jedoch selbst für die einfachsten Anwendungen so nothwendig, dass der Uebersetzer es für gut hält, dieselbe hier nachzutragen.

Sei das Integral:

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\varphi(x)\sqrt{\psi(x)}}$$

gegeben, wo F (x) und φ (x) ganze rationale Funktionen von x von beliebigem, ψ (x) eine solche vom vierten Grade sei, so lassen sich durch eine Transformation aus diesem Ausdrucke die mit ungraden Potenzen behafteten Glieder entfernen. Es ist zunächst nämlich $\sqrt{\psi(x)}$ immer auf die Form $\sqrt{a\,x^2 + 2\,b\,x + c}\,\sqrt{a_1\,x^2 + 2\,b_1\,x + c_1}$ zu bringen, wo die Coefficienten alle reell sind, wenn die Coefficienten von ψ (x) reell waren. Setzt man nun $x = \frac{p+qy}{1+y}$, so wird

$$\sqrt{\psi(x)} = \frac{1}{(1+y)^2}\sqrt{a(p+qy)^2+2b(p+qy)(1+y)+c(1+y)^2}$$
$$\times \sqrt{a_1(p+qy)^2+2b_1(p+qy)(1+y)+c_1(1+y)^2};$$

um hierin die mit y multiplicirten Ausdrücke verschwinden zu machen, setzt man:

$$apq + b(p+q) + c = 0$$

und

$$a_1pq + b_1(p+q) + c_1 = 0.$$

Habe die Gleichung $ax^2+2bx+c = 0$ die Wurzeln α und β und $a_1x^2+2b_1x+c_1 = 0$ die Wurzeln γ und δ, so ist:

$$\sqrt{\psi(x)} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)},$$

$$-(\alpha+\beta) = 2\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a},$$

$$-(\gamma+\delta) = 2\frac{b_1}{a_1}, \qquad \gamma\delta = \frac{c_1}{a_1},$$

also die beiden Bedingungsgleichungen für das Verschwinden der Coefficienten von y werden:

$$p\,q - \frac{\alpha+\beta}{2}(p+q) + \alpha\beta = 0,$$

$$p\,q - \frac{\gamma+\delta}{2}(p+q) + \gamma\delta = 0,$$

also:

$$p+q = \frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta},$$

$$p\,q = \frac{\alpha+\beta(\alpha\beta-\gamma\delta) - \alpha\beta(\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}.$$

Falls die Coefficienten von $\psi(x)$ reell sind, werden auch p und q reell. Die Bedingung für letzteres ist nämlich die, dass $(p-q)^2$ positiv sein muss. $p+q$ und $p\,q$ sind nun reell, die Grössen α und β sind entweder reell oder von der Form $\lambda+\mu i$ und $\lambda-\mu i$, also jedenfalls $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ reell; Gleiches gilt von γ und δ. Es ergiebt sich nun:

$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - p\,q = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist in der That positiv; denn sind z. B. γ und δ Imaginäre von der Form $\lambda+\mu i$, $\lambda-\mu i$, so ergiebt sich für den Zähler:

$$[(\alpha-\lambda)^2+\mu^2]\quad[(\beta-\lambda)^2+\mu^2].$$

Sind auch α und β von der Form $\lambda_1+\mu_1 i$, $\lambda_1-\mu_1 i$, so ergiebt sich für den Zähler:

$$[(\lambda_1-\lambda)^2+(\mu_1+\mu)^2]\quad[(\lambda_1-\lambda)^2+(\mu_1-\mu)^2];$$

sind $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ reell, so kann man diese Ausdrücke so ordnen, dass $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ ist, wo dann sich ebenfalls der Zähler als

positiv ergiebt; da Gleiches mit dem Nenner stattfindet, lassen sich p und q also immer reell bestimmen und es wird:

$$\sqrt{\psi(x)} = \sqrt{(cy^2 + d)}\ \sqrt{(ey^2 + f)}.$$

Setzt man auch in $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ $x = \frac{p+qy}{1+y}$ ein, so hört dieser Ausdruck nicht auf rational zu sein.

Nun kommt es darauf an, das Integral:

$$\int \frac{F(y)\,dy}{\varphi(y)\sqrt{(cy^2+d)(ey^2+f)}}$$

auf die Form $\int U\,dz$ zu bringen, wo U eine rationale Funktion von sin am z, cos am z oder Δ am z ist. Wie im Buche selbst (Abschnitt G.) gezeigt, lässt sich dieser Ausdruck nämlich immer auf eine der drei Gattungen von elliptischen Funktionen zurückführen. Zunächst sind in unserm Integral die Faktoren c und e durch Division wegzuschaffen. Versteht man dann unter a und b beliebige reelle Grössen, so nimmt der Wurzelausdruck immer eine der folgenden fünf Formen an:

1) $\sqrt{(y^2 + a^2)(y^2 + b^2)}$,

2) $\sqrt{(y^2 + a^2)(y^2 - b^2)}$,

3) $\sqrt{-(y^2 + a^2)(y^2 - b^2)}$,

4) $\sqrt{(y^2 - a^2)(y^2 - b^2)}$,

5) $\sqrt{-(y^2 - a^2)(y^2 - b^2)}$.

Wir setzen nun, indem wir unter k den Modul von sin am (z) verstehen, in jedem dieser 5 Fälle:

1) $y = b \operatorname{tg} \operatorname{am} z, \quad k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$,

2) $y = \frac{b}{\cos \operatorname{am} z}, \quad k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$,

3) $y = b \cos \operatorname{am} z, \quad k^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}$,

4) $y = b \sin \operatorname{am} z, \quad k^2 = \frac{b^2}{a^2}$,

5) $y = \frac{b}{\cos \operatorname{am} z}, \quad k^2 = \frac{a^2}{a^2-b^2}$.

Man erhält dann bezüglich, wenn wir die Wurzelausdrücke mit U bezeichnen:

1) $U = ab \sec^2 \operatorname{am} z \, \Delta \operatorname{am} z$, $\quad dy = \frac{b \, d \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z}$,

2) $U = \frac{b\sqrt{a^2+b^2} \sin \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z} \Delta \operatorname{am} z$, $\quad dy = \frac{b \sin \operatorname{am} z \, d \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z}$,

3) $U = b\sqrt{a^2+b^2} \sin \operatorname{am} z \, \Delta \operatorname{am} z$, $\quad dy = - b \sin \operatorname{am} z \, d \operatorname{am} z$,

4) $U = ab \cos \operatorname{am} z \, \Delta \operatorname{am} z$, $\quad dy = b \cos \operatorname{am} z \, d \operatorname{am} z$,

5) $U = \frac{b\sqrt{a^2-b^2} \sin \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z} \Delta \operatorname{am} z$, $\quad dy = \frac{b \sin \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z} d \operatorname{am} z$,

und da $\frac{d \operatorname{am} z}{\Delta \operatorname{am} z} = dz$ ist, ergiebt sich für $\frac{dy}{U}$ in jedem der 5 Fälle:

1) $\frac{1}{a} dz$, $\quad$ 2) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} dz$, $\quad$ 3) $-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} dz$,

4) $\frac{1}{a} dz$, $\quad$ 5) $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} dz$.

Der rationale Theil des Integrals $\frac{F(y)}{\varphi(y)}$ ist eine rationale Funktion von sin am z, cos am z oder tg am z. Die Reduktion auf eine der drei Formen elliptischer Integrale kann also immer auf die im Buche gegebene Art bewerkstelligt werden.

Druckfehler.

Seite 11, Zeile 1 von unten, statt: $\sum \frac{1}{mx + m^2}$ lies: $-\sum \frac{x}{mx + m^2}$.

„ 15, „ 11 von oben, statt: Addition, lies: Definition.

„ 32, „ 12 von unten, statt: cos x, lies: cos 2 x.

„ 61, „ 2 von unten, statt: vierten Grade, lies; vier nten Grade.

Druck von G. Hickethier in Berlin.